

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

FACULDADE DE TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

**EXTRAÇÃO EM POÇO DE PETRÓLEO EM REGIME DE FLUXO
TRANSIENTE – ESTUDO NUMÉRICO**

PEDRO VICTOR SERRA MASCARENHAS

ORIENTADOR: ANDRÉ LUÍS BRASIL CAVALCANTE

MONOGRAFIA DE PROJETO FINAL EM ENGENHARIA CIVIL

BRASÍLIA / DF: 07 / 2016

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**EXTRAÇÃO EM POÇO DE PETRÓLEO EM REGIME DE FLUXO
TRANSIENTE – ESTUDO NUMÉRICO**

PEDRO VICTOR SERRA MASCARENHAS

MONOGRAFIA DE PROJETO FINAL SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE BACHAREL EM ENGENHARIA CIVIL.

APROVADA POR:

**ANDRÉ LUÍS BRASIL CAVALCANTE, D.Sc (UnB)
(ORIENTADOR)**

**JUAN FELIX RODRIGUEZ REBOLLEDO, Ph.D (UnB)
(EXAMINADOR INTERNO)**

**LUCAS PARREIRA DE FARIA BORGES, BACHAREL EM ENGENHARIA CIVIL (UnB)
(EXAMINADOR EXTERNO)**

DATA: BRASÍLIA/DF, 06 de JULHO de 2016.

FICHA CATALOGRÁFICA

MASCARENHAS, PEDRO VICTOR SERRA

Extração em Poço de Petróleo em Regime de Fluxo Transiente – Estudo Numérico [Distrito Federal] 2016.

xi, 81 p., 297 mm (ENC/FT/UnB, Bacharel, Engenharia Civil, 2016)

Monografia de Projeto Final - Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.

1. Petróleo

2. Método das Diferenças Finitas

3. Poços

4. Regime Transiente

I. ENC/FT/UnB

II. Título (série)

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

MASCARENHAS, P.V.S. (2016). Extração em Poço de Petróleo em Regime de Fluxo Transiente - Estudo Numérico. Monografia de Projeto Final, Publicação G.PF-001/16, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 45 p.

CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Pedro Victor Serra Mascarenhas

TÍTULO DA MONOGRAFIA DE PROJETO FINAL: Extração em Poço de Petróleo em Regime de Fluxo Transiente - Estudo Numérico.

GRAU / ANO: Bacharel em Engenharia Civil / 2016

É concedida à Universidade de Brasília a permissão para reproduzir cópias desta monografia de Projeto Final e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta monografia de Projeto Final pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

Pedro Victor Serra Mascarenhas
SQN 107 Bloco B apartamento 203
70.743-020 – Brasília/DF - Brasil

RESUMO

O estudo de como fluidos movimentam-se em meios porosos é de grande importância para a área de engenharia de petróleo. Por meio de modelagens de como ocorre a queda de pressão ao longo do reservatório com a abertura de um ou mais poços, é possível prever as taxas de extração de óleo e realizar uma análise de viabilidade do empreendimento. O campo de engenharia de reservatórios de petróleo surgiu com esta finalidade: por meio da modelagem de fluidos usando equações de conservação de mecânica dos fluidos, tenta-se modelar o fluxo de hidrocarboneto na formação rochosa até o(s) poço(s). Dentre os vários modelos existentes, o mais conhecido é a solução analítica para regime de escoamento radial e transiente da equação de difusividade. Este trabalho propõe-se a analisar a influência da variação dos parâmetros do reservatório na queda de pressão ao longo da extensão do reservatório para a solução do modelo analítico e explicar o comportamento encontrado, bem como formular um modelo numérico em diferenças finitas para resolução do problema e validá-lo por meio dos resultados encontrados.

ABSTRACT

The study of how fluids move through porous media is of great importance for Reservoir Engineering. Through pressure drop modelling along the full extent of the reservoir when one or more wells are constructed, it is possible to predict oil production inflow and analyze the viability of the enterprise. The field of reservoir engineering was created with this purpose: by modelling hydrocarbons flow using conservation equations from fluid mechanics, it is attempted to model flow inside the rock formation in direction to the wellbore. Among the many models proposed, the most studied one is the solution of the diffusivity equation for radial and transient flow conditions. This work contains an analysis of the influence that each parameter takes on the pressure drop along the extension of the reservoir, and why is that behavior happening. At the end, a Finite Difference numerical method model is proposed and validated by comparing its results with the ones obtained from the first analysis.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	OBJETIVOS	2
1.2	ESCOPO DA MONOGRAFIA.....	2
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	3
2.1	EQUAÇÃO DE DARCY GENERALIZADA.....	3
2.2	EQUAÇÃO DE DIFUSIVIDADE	13
2.3	REGIME DE FLUXO TRANSIENTE.....	21
2.4	HIPÓTESES DO MODELO.....	24
2.5	A VARIAÇÃO DE PRESSÃO	27
2.6	MÉTODO DA DIFERENÇAS FINITAS PARA MALHA RADIAL.....	28
2.6.1	CRESCIMENTO GEOMÉTRICO DA MALHA	35
2.6.2	POSIÇÃO DOS LIMITES DA CÉLULAS	36
3	METODOLOGIA.....	37
4	RESULTADOS	40
4.1	VARIAÇÃO DA PRESSÃO COM O TEMPO.....	40
4.2	VARIAÇÃO DA PRESSÃO COM A POSIÇÃO	41
4.3	VARIAÇÃO DA PRESSÃO COM A PERMEABILIDADE.	42
4.4	VARIAÇÃO DA PRESSÃO COM A VISCOSIDADE DO FLUIDO.....	44
4.5	VARIAÇÃO DA PRESSÃO COM A ESPESSURA DO RESERVATÓRIO.....	46
4.6	VARIAÇÃO DA PRESSÃO COM A POROSIDADE DO MEIO.	48
4.7	VARIAÇÃO DA PRESSÃO COM A COMPRESSIBILIDADE DA FORMAÇÃO. ...	50
4.8	SIMULAÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO EM ESTUDO.	52
4.9	COMPARAÇÃO DE RESULTADOS COM HIPÓTESES RELAXADAS	57
4.10	ESTUDO DE CASOS COMPLEXOS	60
5	CONCLUSÃO.....	62
6	REFERÊNCIAS	64
A.	ANEXO: DEMONSTRAÇÃO DA EQUAÇÃO DE FLUXO RADIAL EM REGIME TRANSIENTE (ROSA, <i>et al.</i> , 2006).	65
B.	ANEXO: OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS FINITA (ERTEKIN, <i>et al.</i> , 2001).	71
C.	ANEXO: MUDANÇA DE VARIÁVEIS PARA COORDENADAS POLARES	78

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 - Esquema do aparelho usado por Darcy com os parâmetros geométricos ilustrados. O meio é preenchido por material poroso	5
Figura 2.2 - Esquema de reservatório em regime de escoamento transiente	22
Figura 2.3 - Esquema de um poço penetrando uma formação rochosa e os parâmetros importantes do modelo fonte-linha.....	24
Figura 2.4 - Esquema de um reservatório genérico de petróleo.....	26
Figura 2.5 – Ilustração conceitual da malha de Diferenças Finitas.	30
Figura 4.1. Variação de pressão no tempo para $r=300$ m.	41
Figura 4.2. Variação de pressão na posição para $t=30$ dias.	42
Figura 4.3. Variação de pressão no tempo para $r=300$ m e diferentes valores de permeabilidade.....	43
Figura 4.4. Variação de pressão na distância para $t=30$ dias e diferentes valores de permeabilidade.	44
Figura 4.5. Variação de pressão no tempo para $r=300$ m para diferentes valores de viscosidade.	45
Figura 4.6. Variação de pressão na distância para $t=30$ dias e diferentes valores de viscosidade.	46
Figura 4.7. Variação de pressão no tempo para $r=300$ m e diferentes valores de espessura de formação.	47
Figura 4.8. Variação de pressão na posição para $t=30$ dias e diferentes valores de espessura de formação.	48
Figura 4.9. Variação de pressão no tempo para $r=300$ m e diferentes valores de porosidade.	49
Figura 4.10. Variação de pressão na posição para $t=30$ dias e diferentes valores de porosidade.	49
Figura 4.11. Variação de pressão no tempo para $r=300$ m e diferentes valores de compressibilidade total.	50
Figura 4.12 - Variação de pressão na posição para $t=30$ dias e diferentes valores de compressibilidade total.	51
Figura 4.13 – Valores de raio (m) para cada dia após a produção para os quais $\Delta p \leq 0,1 Pa$	52
Figura 4.14 – Comparação entre soluções numérica e analítica para tempo fixo.	53
Figura 4.15 – Comparação entre soluções numérica e analítica para posição fixa.	53
Figura 4.16 – Erro Absoluto no tempo.	54
Figura 4.17 – Erro Absoluto na posição	55
Figura 4.18 – Erro relativo no tempo.	55
Figura 4.19 – Erro relativo na posição.....	56
Figura 4.20 – Estudo do problema proposto com algumas hipóteses relaxada, solução no tempo comparada com a solução analítica	57
Figura 4.21 – Estudo do problema proposto com algumas hipóteses relaxada, solução no espaço comparada com a solução analítica.	58
Figura 4.22 - Diferença entre a solução analítica e a solução numérica com hipóteses de gravidade e variação do fator volume-formação do óleo relaxadas analisada na distância.....	59
Figura 4.23 - Diferença entre a solução analítica e a solução numérica com hipóteses de gravidade e variação do fator volume-formação do óleo relaxadas analisada no tempo.	60
Figura 4.24 – Estudo do problema proposto com tensor de permeabilidade heterogêneo e anisotrópico, solução no tempo comparada com a solução analítica.	61
Figura 4.25 -Estudo do problema proposto com tensor de permeabilidade heterogêneo e anisotrópico, solução no espaço comparada com a solução analítica.	61

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Expressões para fator geométrico de acordo com a malha e a direção de fluxo (AZIZ e PEDROSA, 1986).....	32
Tabela 3.1 - dados usados no estudo de reservatório	38

LISTA DE SÍMBOLOS

- c - Compressibilidade de um fluido;
- c_f - Compressibilidade de formação;
- c_t - Compressibilidade total da formação;
- da - Operador diferencial aplicado a uma variável “a” qualquer;
- da/db - Operador de diferenciação ordinária aplicado a uma variável “a” qualquer em relação a outra variável qualquer “b”;
- h - Carga Piezométrica;
- h_i - Carga piezométrica a um dado nível “i”;
- i - Gradiente hidráulico ou índice que reflete a posição na primeira dimensão espacial de uma célula na malha de Diferenças finitas, a depender do contexto;
- j - Índice que reflete a posição na segunda dimensão espacial de uma célula na malha de Diferenças finitas, a depender do contexto;
- k - Permeabilidade absoluta do meio ou índice que reflete a posição na terceira dimensão espacial de uma célula na malha de Diferenças finitas, a depender do contexto;
- $k_{i,j,k}$ - Permeabilidade da célula na posição (i,j,k);
- k_r - Permeabilidade absoluta do meio na direção “r”;
- k_x - Permeabilidade absoluta do meio na direção “x”;
- k_y - Permeabilidade absoluta do meio na direção “y”;
- k_z - Permeabilidade absoluta do meio na direção “z”;
- k_θ - Permeabilidade absoluta do meio na direção “ θ ”;
- n - Nível de tempo atual no modelo numérico.
- p - Pressão;
- p_0 - Pressão calculada para um nível de referência adotado;
- p_e - Pressão externa do reservatório;
- p_i^n - Pressão na célula “i” calculada no passo de tempo “n”
- p_j - Pressão calcular em um dado ponto “j”;
- p_{in} - Pressão de entrada em um leito poroso;
- p_{out} - Pressão de saída em um leito poroso;
- $p_{t=0}$ - Pressão no início da extração;
- p_w - Pressão no poço;
- q - Vazão volumétrica através do leito;
- q_{sc} - Vazão de entrada ou saída interna ao volume de controle;
- q_w - Vazão do poço;
- r - Posição radial a partir do centro do poço;
- r_e - Raio externo do reservatório;
- r_i - Raio até um determinado ponto “i”;
- r_w - Raio do poço;

- t - Tempo;
- u - Variável usada no processo de substituição de variável no Anexo C;
- v - Vetor velocidade instantânea do fluxo;
- v_x - Componente da velocidade instantânea na direção “x”;
- v_y - Componente da velocidade instantânea na direção “y”;
- v_z - Componente da velocidade instantânea na direção “z”;
- Z - Conta altimétrica;
- z_0 - Cota de nível para o nível de referência adotado;
- C - Constante de integração;
- A - Área de seção transversal do meio poroso;
- $A^n_{i,j,k}$ - Transmissibilidade da célula i, j, k na sua face “acima” calculada no tempo n ;
- $A_G^n_{i,j,k}$ - Transmissibilidade da célula i, j, k na sua face “acima” calculada no tempo n e multiplicado pelo peso específico;
- A_x - Área perpendicular à direção “x”;
- B - Fator Volume-Formação do óleo;
- $B^n_{i,j,k}$ - Transmissibilidade da célula i, j, k na sua face “abaixo” no tempo n ;
- $B_G^n_{i,j,k}$ - Transmissibilidade da célula i, j, k na sua face “abaixo” no tempo n e multiplicada pelo peso específico;
- B_{std} - Fator Volume-Formação do óleo em condições padrão;
- C - Constante de integração;
- $C^n_{i,j,k}$ - Transmissibilidade da célula i, j, k na sua face “centro” no tempo n ;
- $C_G^n_{i,j,k}$ - Transmissibilidade da célula i, j, k na sua face “centro” no tempo n e multiplicada pelo peso específico;
- $E_i(X)$ - Função integral exponencial calculada na variável “X”;
- $E^n_{i,j,k}$ - Transmissibilidade da célula i, j, k na sua face “leste” no tempo n ;
- $E_G^n_{i,j,k}$ - Transmissibilidade da célula i, j, k na sua face “leste” no tempo n e multiplicada pelo peso específico;
- G - Fator geométrico da malha;
- K - Condutividade hidráulica;
- L - Comprimento do leito poroso;
- $N^n_{i,j,k}$ - Transmissibilidade da célula i, j, k na sua face “norte” no tempo n ;
- $N_G^n_{i,j,k}$ - Transmissibilidade da célula i, j, k na sua face “norte” no tempo n e multiplicada pelo peso específico;
- $Q^n_{i,j,k}$ - Termos independentes da equação da célula i, j, k na sua face “norte” no tempo n ;
- $Q_G^n_{i,j,k}$ - Termos independentes da Equação da célula i, j, k na sua face “norte” no tempo n e multiplicada pelo peso específico;
- $S^n_{i,j,k}$ - Transmissibilidade da célula i, j, k na sua face “sul” no tempo n ;
- $S_G^n_{i,j,k}$ - Transmissibilidade da célula i, j, k na sua face “sul” no tempo n e multiplicada pelo peso específico;

$T_{i,j,k}^n$	- Transmissibilidade calculada no passo de tempo n e posição i, j, k ;
V_b	- Volume da célula a simulação numérica;
$W_{i,j,k}^n$	- Transmissibilidade da célula i, j, k na sua face “oeste” no tempo n ;
W_G^n	- Transmissibilidade da célula i, j, k na sua face “oeste” no tempo n e multiplicada pelo peso específico;
X	- Variável da transformação de Boltzmann;
Y	- Variável de substituição;
Z	- Cota de um determinado ponto com relação à um nível de referência;
Z_0	- Cota de um ponto de referência com relação à um determinado nível adotado;
α_{lg}	- Fator de crescimento geométrico da malha;
γ	- Peso específico do fluido;
η	- Constante de difusividade;
θ	- Medida de ângulo a partir de um eixo de referência;
μ	- Viscosidade do fluido;
ρ	- Massa específica do fluido;
ρ_{std}	- Massa específica do fluido em condições padrão;
ϕ	- Porosidade efetiva do meio;
ϕ_o	- Porosidade efetiva inicial do meio;
Δh	- Diferença de carga hidráulica entre dois pontos;
Δr	- Espessura radial do volume de controle;
Δr_i	- Espessura radial da célula do modelo numérico;
Δt	- Passo de tempo adotado na simulação numérica;
Δx_i	- Extensão da célula da simulação numérica na direção “x”;
Δy_j	- Extensão da célula da simulação numérica na direção “y”;
Δz_k	- Extensão da célula da simulação numérica na direção “z”;
$\Delta \theta_i$	- Variação de ângulo das faces da célula radial;
$\Delta \Phi$	- Variação de potencial de fluxo;
Φ	- Potencial de fluxo de um fluido;
Γ	- Termo de armazenamento do modelo numérico;
∇	- Operador gradiente ou operador divergente ;
$\partial a / \partial b$	- Operador de diferenciação parcial aplicado a uma variável “a” qualquer em relação a outra variável qualquer “b”;

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho trata da percolação de óleo em reservatórios de petróleo. Trata-se de uma análise na qual será estudado o fluxo monofásico de óleo no reservatório e a solução da Equação de Difusividade para o modelo de fluxo radial em regime transiente para diferentes valores dos parâmetros presentes na equação por meio de solução analítica e numérica. O tema é de grande interesse devido a sua aplicação em estudos preliminares que determinarão a viabilidade de extração de determinado reservatório.

O trabalho começa com uma rápida revisão bibliográfica da teoria de percolação clássica e a utilização das soluções analíticas para um primeiro estudo do fluxo usando o software computacional *Mathematica Wolfram 10.1* (WOLFRAM RESEARCH, 2015). A validação do modelo dar-se-á por meio do estudo do exemplo 3.4 do livro Fundamentos de Engenharia de Reservatório. O estudo da influência dos parâmetros do reservatório na melhoria da produção será feito por meio de um estudo de como a curva de variação de pressão desde o início da extração, plotada contra o tempo ou distância, se desloca quando se altera o valor de algum destes parâmetros, plotados a partir da solução da Equação de Difusividade com algumas hipóteses simplificadoras.

A importância do tema dá-se justamente pela necessidade de métodos cada vez mais eficientes e econômicos na extração do petróleo como forma de diminuir os preços de produção frente à queda dos preços do barril. A análise da solução analítica da Equação de Difusividade constitui um dos primeiros estudos executados hierarquicamente na determinação da viabilidade de extração de poços usados em engenharia de reservatórios de petróleo e, portanto, é crucial para a determinação ou não de abertura de poços em novos reservatórios. Apesar de acrescentar hipóteses ao modelo, a física do problema continua mantida e a solução analítica é capaz de fornecer valores de entrada de parâmetros cruciais para as etapas seguintes de simulação de reservatório (AHMED, 2010).

Posteriormente, utiliza-se o Método das Diferenças Finitas aplicado ao caso em estudo para se obter uma solução aproximada que seja válida; definindo, assim, um modelo numérico útil para a simulação de casos de geometria e rocha mais complexos e com hipóteses que inviabilizem a solução analítica do problema. O modelo numérico será validado por comparação com a solução analítica e será utilizado para estudar diferenças na solução analítica estudada com problemas com hipóteses simplificadoras relaxadas. Adicionalmente, o modelo será confrontado com um caso com

permeabilidade heterogênea e anisotrópica para testar sua aplicabilidade em casos futuros mais complexos.

O modelo numérico estudado é do Método de Diferenças Finitas em 3 dimensões aplicado para malha radial de crescimento geométrico. O modelo é utilizado, principalmente, para o estudo de eficiência de poços singulares (ERTEKIN, JAMAL e GREGORY, 2001), sendo também possível sua aplicação para criar malhas híbridas em conjunto com a malha cartesiana em regiões de poços no modelo global.

1.1 OBJETIVOS

O objetivo desta monografia é estudar a queda de pressão no reservatório de petróleo a partir da solução analítica de fluxo radial submetido a regime de fluxo transiente e como a variação dos parâmetros do reservatório e fluido interferem na melhora ou piora da energia disponível para elevação do fluido. Além disto, pretende-se definir um modelo válido de estudo de poços para trabalhos de conclusão de graduação futuros na área.

1.2 ESCOPO DA MONOGRAFIA

A presente monografia está organizada da forma da apresentada a seguir.

O Capítulo 1 abrange a introdução à monografia, bem como os objetivos propostos e o seu escopo. O Capítulo 2 trata sobre a revisão bibliográfica necessária à realização do estudo proposto. Apresenta-se a descrição do fluxo de fluido em meios porosos por meio da teoria clássica de Darcy generalizada, com a definição de conceitos importantes ao estudo de Engenharia de Reservatórios de Petróleo. Neste mesmo capítulo, obtém-se a Equação de Difusividade a partir da Lei de Darcy, equação de continuidade e Equações de Estado e define-se os tipos de regimes de fluxo, incluindo o regime de fluxo transiente. Ainda neste capítulo, realiza-se a transformação da Equação de Difusividade na forma de coordenadas polares e apresenta-se a equação de pressão para regime de fluxo transiente e radial advinda da Equação de Difusividade, cuja demonstração encontra-se no Anexo A.

Ao final, descreve-se o modelo numérico utilizado para simular o caso estudado justificando-se os passos adotados. O desenvolvimento matemático da equação até a forma numérica que é aplicada está alocado no Anexo B.

No Capítulo 3 apresenta-se a metodologia adotada para o estudo em questão.

No Capítulo 4, apresenta-se aos resultados adotados explicando, fisicamente, o comportamento das curvas. Também se discute a validade do modelo numérico comparando seus resultados ao do modelo analítico.

No Capítulo 5, realiza-se uma breve conclusão acerca dos resultados que foram obtidos na monografia com uma avaliação crítica dos resultados obtidos, bem como sugere-se novas possibilidades de continuação de estudo para o tema adotado.

Por fim, cita-se as referências bibliográficas utilizadas na confecção do presente documento.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 EQUAÇÃO DE DARCY GENERALIZADA

Procura-se, aqui, abordar como é o comportamento mecânico de fluidos em meios porosos. Os conceitos e definições usados foram retirados de ROSA, *et al.*, 2006, exceto em casos explicitamente citados.

A principal hipótese que se assume é que o fluido é ligeiramente compressível, ou seja, variações de sua densidade e volume devido às mudanças de pressão são pequenas e podem ser consideradas como linearmente relacionadas. Esta hipótese é normalmente utilizada quando se modela fluxo de líquidos, enquanto se assume que gases possuem um comportamento compressível que demandará a definição de potencial de um gás. Óleos sem gás dissolvido apresentam este tipo de comportamento.

Em 1856, Darcy mostrou empiricamente a relação entre vazão e a diferença de carga hidráulica para um fluido que percola em um leito poroso, a partir de um aparelho similar ao mostrado na Figura 2.1. Esta relação é dada por:

$$q = \frac{KA\Delta h}{L} \quad (2.1)$$

onde,

q = vazão volumétrica através do leito [L^3T^{-1}];

A = área da seção transversal do meio poroso (Área perpendicular ao movimento do fluido [L^2];

L = comprimento do leito poroso [L];

K = constante de proporcionalidade chamada de condutividade hidráulica [LT^{-1}];

Δh = diferença de carga associada à vazão obtida [L].

A relação entre a diferença de carga e o comprimento do meio poroso é comumente chamada de gradiente hidráulico e é dado por:

$$i = \frac{\Delta h}{L} \quad (2.2)$$

onde,

i = gradiente hidráulico [adimensional];

Δh = diferença entre a carga hidráulica no início e final da trajetória na qual se calcula o gradiente [L].

Além de assumir que o fluido é incompressível, outras importantes suposições na derivação desta equação são: efeitos inerciais desprezíveis, fluxo laminar, a parte viscosa do tensor de tensão comporta-se de acordo com a segunda lei de Newton (SZYMKIEWICZ, 2013).

A condutividade hidráulica depende de características do fluido que percola e do meio no qual ocorre escoamento. É interessante, então, definir uma constante que dependa somente de características do meio no qual o fluido percola. Darcy, então, ainda mostrou que:

$$K = \frac{k}{\mu} \gamma \quad (2.3)$$

onde,

γ = peso específico do fluido [$ML^{-2}T^{-1}$];

μ = viscosidade do fluido [$ML^{-1}T^{-1}$];

k = permeabilidade intrínseca do meio [L^2].

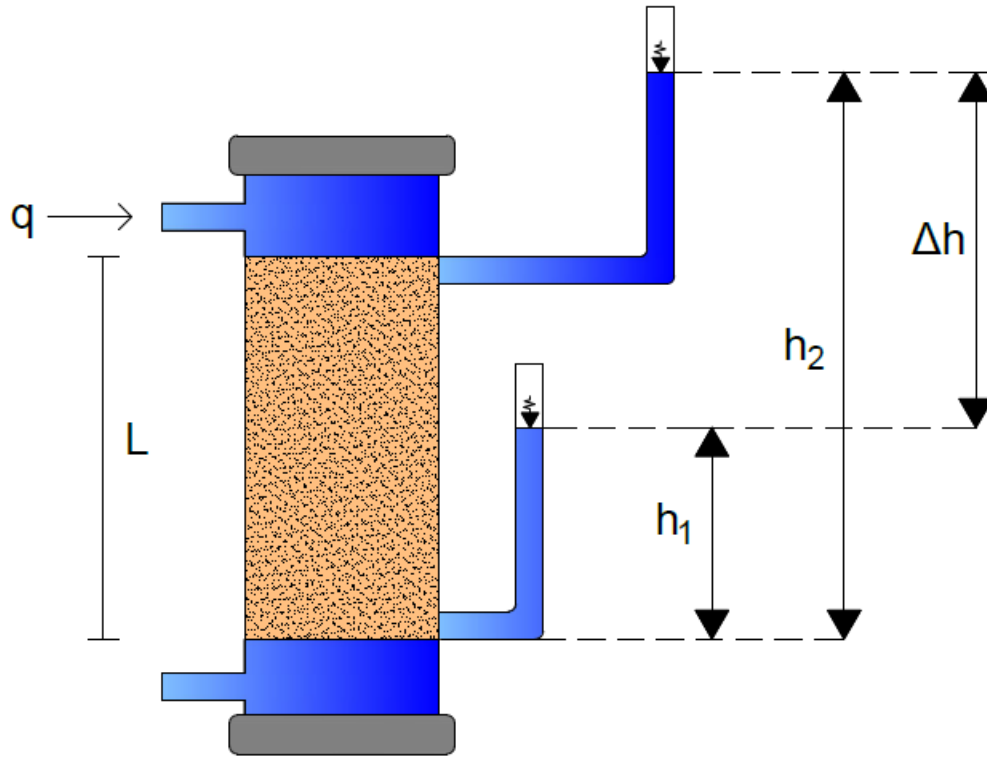


Figura 2.1 - Esquema do aparelho usado por Darcy com os parâmetros geométricos ilustrados. O meio é preenchido por material poroso

A permeabilidade intrínseca do meio ao fluido (JIAHUI, *et al.*, 2010) é a facilidade com que o fluido escoar no meio e a viscosidade é o coeficiente proveniente da Segunda Lei de Newton para fluidos que representa a resistência do fluido ao escoamento (definido como a razão entre a tensão de cisalhamento aplicada e a taxa temporal de deformação angular).

Tem-se, agora uma constante que independe de características do fluido. Substituindo a Equação (2.3) na Equação (2.1), escreve-se a lei de Darcy como:

$$q = \frac{kA\gamma\Delta h}{\mu L} \quad (2.4)$$

Para generalizar as equações e evitar de se trabalhar com pressões referidas a diferentes cotas, criou-se o conceito de potencial de fluxo de um fluido. Este conceito é fundamentado nas forças

que agem no fluido e causam uma reserva de energia potencial. Dependendo de como o potencial de fluxo de um fluido é definido, ele pode ser expresso em unidades de energia por unidade mássica, energia por unidade de volume ou energia por unidade de peso. No presente trabalho, a definição que será tomada de potencial de fluxo o permitirá ser escrito como uma medida da energia potencial específica (com relação ao peso) do fluido; possuindo unidades de $[L]$. O potencial de fluxo do fluido em um ponto é definido como a integral do diferencial de pressão de um fluido dividido por seu peso específico feita de um nível de referência até o ponto especificado mais a cota deste ponto com relação ao nível de referência (SZYMKIEWICZ, 2013):

$$\Phi = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\gamma} + (Z - Z_0) \quad (2.5)$$

onde,

Φ = potencial de fluxo de um fluido $[L]$.

Z = cota em relação a um nível de referência arbitrário $[L]$;

Z_0 = cota do nível de referência $[L]$.

p = pressão em relação a um nível de referência arbitrário $[MT^2L^{-1}]$;

p_0 = é a pressão no nível de referência $[MT^2L^{-1}]$.

Considerando um corpo poroso inclinado com relação a horizontal de um ângulo qualquer e um estado de fluxo também inclinado, observa-se que a carga manométrica sobre a entrada e saída do leito permanecem iguais ao que seriam para um leito vertical com mesma altura que a projeção vertical do leito inclinado e fluxo vertical. Isso se deve ao fato de que, sendo a carga manométrica decorrente de equilíbrio de forças gerada por pressão, variações de posição horizontais não implicam em um aumento de pressões. Sabendo disto e que a definição do potencial de fluxo de fluido envolve apenas a cota (que também possui curvas de nível horizontal), podemos inferir que as linhas equipotenciais para a função definida também são horizontais, o que implica que o potencial de fluxo depende apenas da posição no leito poroso (supondo pressão variando apenas com posição), o que nos permite escrever $\Phi = \Phi(x, y, z)$.

De fato, o potencial de fluxo é função da posição no espaço e do tempo, visto que a pressão também depende desses parâmetros.

Para o caso do fluxo incompressível, γ é constante em relação a p e o potencial de fluxo se torna:

$$\Phi = \frac{p - p_0}{\gamma} + (Z - Z_0) \quad (2.6)$$

Ou seja, o potencial de fluxo reduz-se ao somatório das diferenças de cargas hidráulicas e das cotas entre dois pontos.

Pode-se escrever a lei de Darcy usando o conceito de potencial de fluxo. Para isto, substitui-se a pressão hidrostática pela sua definição:

$$p = \gamma h \quad (2.7)$$

onde p = pressão manométrica a dada altura de referência [MT^2L^{-1}].

Reescreve-se a Equação (2.4) introduzindo o conceito de potencial de fluxo entre dois pontos. A partir da Figura 2.1, o potencial de fluxo do fluido para o topo do leito é:

$$\Phi_1 = \frac{1}{\gamma}(p_1 - p_2) + L \quad (2.8)$$

E também se escreve a expressão do potencial no fundo do leito, que será zero porque foi tomado como referência:

$$\Phi_2 = 0 \quad (2.9)$$

Assim, a diferença entre o potencial de fluxo 1 e 2 é:

$$\Phi_1 - \Phi_2 = \frac{1}{\gamma}(p_1 - p_2) + L \quad (2.10)$$

A Equação (2.10) mostra que a diferença de potencial de fluxo entre entrada e saída do corpo poroso é a diferença entre a carga hidrostática destes dois pontos acrescida da carga gerada pelo

comprimento do corpo poroso que o fluido percorre. Se reescrever a equação desenvolvendo os termos de pressão, isto é, substituindo a Equação (2.7) na Equação (2.10):

$$\Phi_1 - \Phi_2 = \frac{1}{\gamma} [\gamma(h_1 - L) - \gamma h_2] + L \quad (2.11)$$

Vê-se, claramente que a Equação (2.11) reduz à diferença entre cargas hidráulicas dos dois pontos.

$$\Phi_1 - \Phi_2 = h_1 - h_2 \quad (2.12)$$

Consequentemente, substituindo a Equação (2.12) na Equação (2.4):

$$q = \frac{kA\gamma(\Phi_1 - \Phi_2)}{\mu L} \quad (2.13)$$

Um ponto importante na lei de Darcy, é que “L” é um comprimento variável, tomado como ponto inicial e final da região em que se pretende analisar do fluxo. Com isso em mente, é possível generalizar a lei de Darcy tomando o limite com “L” tendendo a 0. Para um volume de controle infinitesimal tem-se:

$$\lim_{L \rightarrow 0} q = \lim_{L \rightarrow 0} \frac{kA\gamma(\Phi_1 - \Phi_2)}{\mu L} \quad (2.14)$$

Para um volume de controle infinitesimal, os termos k , A , μ e γ são invariáveis. Além disso, a expressão para a derivada espacial do potencial de fluxo na direção do fluxo é:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(x+h, y, z) - \Phi(x, y, z)}{h} \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(x, y+h, z) - \Phi(x, y, z)}{h} \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(x, y, z+h) - \Phi(x, y, z)}{h} \quad (2.17)$$

Além disso, a derivada pode também ser escrita como a diferença entre potencial do fluxo em um ponto avançado e um ponto atrasado dividida pela distância tomada entre eles, de tal forma que:

$$\frac{\Phi(L+h) - \Phi(L)}{h} = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{L} \quad (2.18)$$

De onde pode-se concluir a generalização da Lei de Darcy:

$$q_x = -\frac{kA\gamma}{\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (2.19)$$

$$q_y = -\frac{kA\gamma}{\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (2.20)$$

$$q_z = -\frac{kA\gamma}{\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (2.21)$$

onde,

q_x = vazão volumétrica na direção “x” [L^3T^{-1}];

q_y = vazão volumétrica na direção “y” [L^3T^{-1}];

q_z = vazão volumétrica na direção “z” [L^3T^{-1}];

A Lei de Darcy generalizada também pode ser obtida por meio da simplificação da equação de Navier-Stokes para o caso de um fluido incompressível, em regime estacionário (SZYMKIEWICZ, 2013).

Se uma vazão de saída for especificada em vez de uma vazão no início do poço, deve-se levar em conta a mudança de volume do fluido pela passagem das condições de pressão e temperatura no reservatório para as condições nas quais o fluido é armazenado. Geralmente utiliza-se as condições

padrão de temperatura e pressão, definidas por 1 atm e 20°C no Brasil pela Agência Nacional de Petróleo (ROSA *et al.*, 2006). Para isto, define-se o fator volume-formação do óleo como sendo a razão entre o volume do óleo nas condições de reservatório e nas condições padrão:

$$B = \frac{V_{p,T \text{ reservatório}}}{V_{std}} \quad (2.22)$$

onde o índice *std* indica as condições padrão e *B* é dado em $[LL^{-1}_{std}]$. Desta forma, se é conhecida a massa específica em condições padrão do fluido:

$$B = \frac{\rho_{std}}{\rho} \quad (2.23)$$

com ρ = massa específica do fluido $[ML^{-3}]$.

O fator Volume-Formação do óleo é mais usualmente utilizado em conjunto com a massa específica em condições padrão do fluido do que a massa específica do fluido. Este fator é função da pressão e compressibilidade do fluido e pode ser calculado para cada pressão pela equação a seguir:

$$B = \frac{B_o}{1 + c(p - p_o)} \quad (2.24)$$

onde

B_o = fator volume formação do óleo conhecido à determinada pressão [*adimensional*];

p_o = pressão conhecida de referência $[MT^2L^{-1}]$;

c = compressibilidade do óleo $[M^{-1}T^{-2}L^1]$.

Analogamente, a porosidade do meio a uma pressão diferente da qual ela foi fornecida é calculada por:

$$\phi = \phi_o [1 + c_f(p - p_o)] \quad (2.25)$$

onde,

ϕ = porosidade efetiva do meio [*adimensional*].

ϕ_o = porosidade do reservatório conhecido à determinada pressão [adimensional];

c_f = compressibilidade do óleo [$M^{-1}T^{-2}L^1$].

A velocidade instantânea do fluido [LT^{-1}] é escrita a partir da Equação (2.19) a Equação (2.21):

$$v_x = -\frac{k\gamma}{\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (2.26)$$

$$v_y = -\frac{k\gamma}{\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (2.27)$$

$$v_z = -\frac{k\gamma}{\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (2.28)$$

onde,

v_x = velocidade instantânea na direção “x” [LT^{-1}];

v_y = velocidade instantânea na direção “y” [LT^{-1}];

v_z = velocidade instantânea na direção “z” [LT^{-1}].

Para tornar esta equação mais significativa em termos das medições de campo, encontra-se uma forma de exprimir a derivada do potencial de fluxo em função da derivada cota e derivada da pressão manométrica. Basta tomar, então, a definição de potencial de fluxo para encontrar:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{p_o}^p \frac{dp}{\gamma} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (Z - Z_0) \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_{p_o}^p \frac{dp}{\gamma} \right) + \frac{\partial}{\partial y} (Z - Z_0) \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\int_{p_o}^p \frac{dp}{\gamma} \right) + \frac{\partial}{\partial z} (Z - Z_0) \quad (2.31)$$

ou ainda,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial x} \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial y} \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial z} \quad (2.34)$$

Assim, pode-se substituir as Equações (2.32) a (2.34) nas Equações (2.26) a (2.28) para obter:

$$v_x = -\frac{k\gamma}{\mu} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \quad (2.35)$$

$$v_y = -\frac{k\gamma}{\mu} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial Z}{\partial y} \right) \quad (2.36)$$

$$v_z = -\frac{k\gamma}{\mu} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial z} \right) \quad (2.37)$$

Nas Equações (2.35) a (2.37) não se simplifica o termo de gradiente altimétrico porque os eixos coordenados podem estar orientados de forma arbitrária no espaço.

Da forma que as Equações (2.35) a (2.37) foram obtidas, é possível escrevê-las para qualquer uma das três direções do espaço cartesiano, respeitando-se o fato de que a permeabilidade pode ter valores diferentes para cada direção. Resumindo as Equações (2.35) a (2.37) em somente uma equação:

$$v = -\frac{k\gamma}{\mu} \nabla \Phi \quad (2.38)$$

onde v é o vetor de velocidade instantânea do fluido $[LT^{-1}]$.

2.2 EQUAÇÃO DE DIFUSIVIDADE

A Equação de Difusividade é fruto da associação entre a equação de conservação de massa e uma equação que rege o transporte do fluido em meio poroso (equação de Darcy). A combinação ainda se utiliza das equações de estado para simplificar os termos da equação combinada.

A equação de conservação de massa relaciona o saldo de massa que entrou ou saiu em um dado volume de controle com a taxa de variação de massa de fluido dentro deste volume. Em termos matemáticos. No caso de fluxo monofásico, os vazios estão completamente preenchidos por óleo e a equação pode ser escrita como:

$$\nabla \cdot (v\rho) + \frac{\rho_{std} q_{sc}}{V_b} = - \frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} \quad (2.39)$$

onde,

q_{sc} = termo por meio do qual se implementa condições de contorno internas que indicam vazão de extração ou injeção especificadas, cujo valor é usualmente indicado na superfície. Indica alguma fonte ou retirada de fluidos interno ao volume de controle, que não é captado pela passagem do fluido pela fronteira do volume. $[L^3T^{-1}]$;

Nos desenvolvimentos que seguem acerca da manipulação da Equação (2.39), assume-se que o termo q_{sc} é nulo. Esta hipótese é compatível com o que foi adotado até agora, contudo, o termo q_{sc} é útil para a descrição de condições de contorno no modelo numérico e será tratado novamente no Anexo B.

Desenvolvendo-se a Equação (2.39), pode-se escrevê-la na seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial x}(v_x\rho) + \frac{\partial}{\partial y}(v_y\rho) + \frac{\partial}{\partial z}(v_z\rho) = - \frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho) \quad (2.40)$$

A partir da substituição da equação de Darcy Generalizada, Equações (2.26) a (2.28) escrita para todas as direções x, y e z de um espaço cartesiano na equação de conservação de massa (2.39), obtém-se a Equação de Difusividade (ROSA, *et al.*, 2006):

$$\nabla \cdot \left(\rho \frac{k\gamma}{\mu} \nabla \Phi \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho) \quad (2.41)$$

Desenvolvendo-se a Equação (2.41) em termos das direções do espaço cartesiano:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho k_x \gamma}{\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho k_y \gamma}{\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho k_z \gamma}{\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) = \frac{\partial (\phi \rho)}{\partial t} \quad (2.42)$$

Utilizando expressão para o potencial de fluxo da Equação (2.5) para reescrever a Equação (2.42) e separando o termo gravitacional do termo de pressão:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho k_x}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho k_y}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho k_z}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \\ & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho k_x}{\mu} \gamma \frac{\partial Z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho k_y}{\mu} \gamma \frac{\partial Z}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho k_z}{\mu} \gamma \frac{\partial Z}{\partial z} \right) + \frac{\partial (\phi \rho)}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.43)$$

Aplica-se as equações de estado para retirar a dependência da massa específica do termo temporal e escrevê-la em termos da pressão no reservatório. Equações de estados são denominadas genericamente quaisquer equações constitutivas que correlacionam pressão, temperatura, volume e massa de um fluido. As equações usadas são: equação de compressibilidade dos fluidos e equação de compressibilidade efetiva da formação. A primeira indica a variação fracional do volume de fluido por variação unitária de pressão:

$$c = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right) \quad (2.44)$$

em que V é o volume ocupado pelo fluido $[L^3]$.

A Equação (2.44) é a compressibilidade isotérmica do fluido, ou seja, é definida para temperaturas constantes. Partindo-se deste fato e da definição de massa específica, reescreve-se a Equação (2.44) na forma que será usada:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (2.45)$$

em que m = massa de fluido $[M]$.

Substituindo a Equação (2.45) na Equação (2.44) e realizando a substituição de variáveis para pressão:

$$c = -\frac{\rho}{m} \left(\frac{\partial V}{\partial \rho} \right) \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right) \quad (2.46)$$

Sabendo-se da relação entre volume e massa específica encontra na Equação (2.45), encontra-se uma forma de encontrar a taxa de variação do volume com a densidade:

$$c = -\frac{\rho}{m} \left(-m\rho^{-2} \right) \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right) \quad (2.47)$$

Após efetuar as possíveis simplificações, obtém-se:

$$c = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right) \quad (2.48)$$

A segunda equação de estado usada é a variação fracional do volume de poros da formação por variação unitária de pressão:

$$c_f = \frac{1}{\phi} \left(\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \quad (2.49)$$

A soma destas duas compressibilidades é, por definição, a compressibilidade total:

$$c_t = c + c_f \quad (2.50)$$

A partir das Equações (2.48) a(2.50) , é possível relacionar taxas de variação da massa específica com taxas de variações de pressão nos eixos coordenados e no tempo. Supõe-se que a pressão pode ser escrita como uma função de cada uma das posições cartesianas e do tempo e que ela é uma função inversível destas. A suposição é razoável na medida que, dada a abertura do poço e condições constantes de pressão inicial, a pressão deve decair de forma monótona partir do poço de forma contínua. Assim, para o tempo, tem-se:

$$c = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial p} \quad (2.51)$$

ou

$$\rho \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.52)$$

Agora, da Equação (2.49), busca-se obter uma expressão em função do tempo para a porosidade e pressão:

$$c_f = \frac{1}{\phi} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial t}{\partial p} \right) \quad (2.53)$$

Aplicando-se a propriedade de derivada inversa:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{\phi c_f} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (2.54)$$

Substituindo a Equação (2.52) na Equação (2.54):

$$\frac{c_f \phi}{c \rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (2.55)$$

Procedendo à simplificação da Equação de Difusividade, desenvolve-se o termo temporal da Equação (2.43) :

$$\frac{\partial(\phi \rho)}{\partial t} = \phi \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (2.56)$$

Aplicando a Equação (2.55) na Equação (2.56):

$$\frac{\partial(\phi \rho)}{\partial t} = \phi \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{c_f \phi}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.57)$$

Agora, os dois termos do lado direito da Equação (2.57) têm em comum a porosidade e taxa temporal de variação da massa específica. Fatorando-se estes dois termos:

$$\frac{\partial(\phi \rho)}{\partial t} = \frac{\phi}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} (c + c_f) \quad (2.58)$$

A soma entre parênteses é, por definição, a compressibilidade total:

$$\frac{\partial(\phi \rho)}{\partial t} = \frac{\phi}{c} (c_t) \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.59)$$

De posse de uma expressão para a variação temporal da massa específica obtida por meio da Equação (2.52), reescreve-se a Equação (2.59):

$$\frac{\partial(\phi \rho)}{\partial t} = \phi c_t \rho \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2.60)$$

Dividindo-se a Equação (2.42) pela massa específica do fluido em condições padrão e aplicando a definição de fator volume-formação do óleo e a Equação (2.60), tem-se a seguinte forma da Equação de Difusividade:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k_x}{B\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k_y}{B\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{k_z}{B\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k_x}{B\mu} \gamma \frac{\partial Z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k_y}{B\mu} \gamma \frac{\partial Z}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{k_z}{B\mu} \gamma \frac{\partial Z}{\partial z} \right) + \frac{\phi c_t}{B} \frac{\partial p}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.61)$$

A Equação (2.61) pode ser reescrita em coordenadas polares, como feito no Anexo C, para ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{k_r}{\mu B} \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{k_\theta}{\mu B} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{k_z}{\mu B} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{k_r}{\mu B} \frac{\partial Z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{k_\theta}{\mu B} \frac{\partial Z}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{k_z}{\mu B} \frac{\partial Z}{\partial z} \right) + \frac{\phi c_t}{B} \frac{\partial p}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.62)$$

A Equação (2.62) é a forma na qual o modelo numérico utilizado é desenvolvido.

Continua-se o desenvolvimento da Equação (2.62), aplicando-se as hipóteses simplificadoras, para se obter uma equação resolvível analiticamente.

Expressões para a derivada da compressibilidade em termos das coordenadas espaciais podem ser obtidas de maneira análoga ao que foi feito para a derivada com relação ao tempo. Desta forma, escrevendo a Equação (2.52) para r, θ, z :

$$\rho \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial r} \quad (2.63)$$

Analogamente, na direção θ :

$$\rho \frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \quad (2.64)$$

Na direção z:

$$\rho \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial z} \quad (2.65)$$

Reescrevendo cada termo espacial de pressão da Equação (2.62), em coordenadas cilíndricas:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\rho k_r}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \left(\frac{\partial \rho}{\partial r} \frac{r k_r}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} + \rho \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r k_r}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \right) \right) \quad (2.66)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\rho k_\theta}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) = \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta} \frac{k_\theta}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{k_\theta}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) \right) \quad (2.67)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho k_z}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{k_z}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} + \rho \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{k_z}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) \right) \quad (2.68)$$

Usando as Equações (2.63) a (2.65):

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\rho k_r}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \left(\frac{r k_r}{\mu} c \rho \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)^2 + \rho \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r k_r}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \right) \right) \quad (2.69)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\rho k_\theta}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) = \left(\frac{k_\theta}{\mu} c \rho \left(\frac{\partial p}{\partial \theta} \right)^2 + \rho \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{k_\theta}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) \right) \quad (2.70)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho k_z}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \left(\frac{k_z}{\mu} c \rho \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)^2 + \rho \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{k_z}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) \right) \quad (2.71)$$

Acrescenta-se à hipóteses tomadas a suposição de pequenos gradientes de pressão e compressibilidade do fluido, o que simplifica o primeiro termo da soma do lado direito das Equações (2.69) a (2.71):

$$\frac{rk_r}{\mu} c \rho \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)^2 \rightarrow 0 \quad (2.72)$$

$$\frac{k_\theta}{\mu} c \rho \left(\frac{\partial p}{\partial \theta} \right)^2 \rightarrow 0 \quad (2.73)$$

$$\frac{k_z}{\mu} c \rho \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)^2 \rightarrow 0 \quad (2.74)$$

No caso de fluxo radial e sem efeitos de gradiente gravitacional, o gradiente de pressão em qualquer direção que não a radial é nulo e os termos de gradiente de cota são todos nulos. Utilizando estas hipóteses as conclusões da Equações (2.72) a (2.74), a Equação (2.62):

$$\frac{\rho}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{k_r}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \rho \phi c_t \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2.75)$$

No caso analítico em estudo, é assumido que o fator volume-formação do óleo e a viscosidade pouco variam ao longo do reservatório, porque trata-se de uma análise de fluido monofásico, ligeiramente compressível e isotérmica. É, então, razoável considerar estes parâmetros constantes para o estudo feito. Além disto, como trata-se de uma formação homogênea e isotrópica, a permeabilidade também é considerada constante.

Não obstante a forma que se escreve a Equação de Difusividade para propor um modelo numérico, é mais conveniente escrevê-la da seguinte forma para se obter uma solução analítica:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2.76)$$

Onde foi substituído o termo que relacionava os parâmetros constantes por uma constante:

$$\eta = \frac{k}{\phi \mu c_i} \quad (2.77)$$

O termo definido pela Equação (2.77) é chamado de constante de difusividade e representa a facilidade com que a massa se acumula ou escapa do volume de controle com o tempo.

A Equação (2.76) será resolvida para encontrar uma função que descreva a pressão no reservatório de petróleo ao longo de sua extensão e no tempo.

2.3 REGIME DE FLUXO TRANSIENTE

Para resolver a equação de difusividade, é necessário estabelecer condições de contorno. Estas condições de contorno dependem do padrão de escoamento do poço, que por sua vez depende do momento em que as medições são realizadas e/ou de características geológicas do reservatório (THOMAS, 2004). Os padrões de escoamento podem ser permanente ou não-permanente. Dentro do padrão não-permanente, existem as condições transiente e pseudo-permanente (THOMAS, 2004):

- Regime transiente: regime característico de início de produção do reservatório e até certo período após o início da produção. Neste regime, as condições de contorno impostas pela abertura do poço não se propagam imediatamente ao longo de toda a extensão do reservatório e ele comporta-se como se tivesse extensão ilimitado. Taxas de variação da pressão no tempo são diferentes de zero. Em geral, este padrão dura por poucos dias ou horas e se alonga para formações com baixa permeabilidade. A duração depende do tamanho do reservatório, compressibilidade, viscosidade do fluido, permeabilidade absoluta da rocha e outros fatores geológicos. Este regime é estudado, principalmente, para avaliação da formação. Um esquema ilustrativo deste tipo de fluxo é mostrado na Figura 2.2. Após a estabilização do regime, o fluxo até o poço de petróleo assume a condição pseudo-permanente ou permanente a depender das condições de contorno externas do reservatório.
- Regime pseudo-permanente: Ocorre após o regime transiente. Neste padrão, o reservatório comporta-se como se seu exterior estivesse selado (gradiente de pressão nulo) e a pressão medida começa a ser afetada por esta condição de contorno. Gradientes de pressão nos limites

externos do reservatório são nulos e o volume de hidrocarbonetos extraídos decai até o momento em que a elevação de fluido deixa de ser viável;

- Regime permanente: Ocorre ao final do regime transiente, quando o fluido que é retirado é balanceado pela entrada de mais fluido na fronteira, o que torna a pressão invariável no tempo. A elevação também deve ocorrer a taxa constante. O contrabalanceamento de pressão pode ser causado por um abastecimento de água de um aquífero, pela injeção de água ou gás carbônico no reservatório.

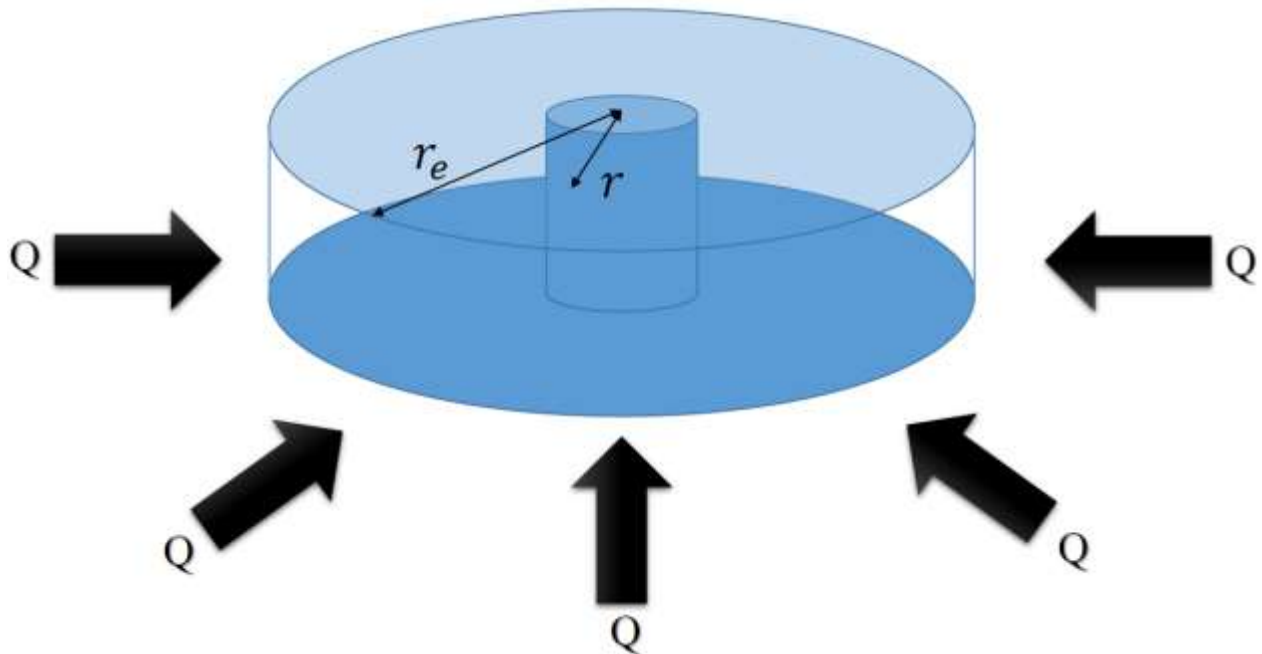


Figura 2.2 - Esquema de reservatório em regime de escoamento transiente

O caso de geometria de reservatório com solução analítica possível mais próximo da realidade é o de extração com fluxo radial (THOMAS, 2004). Vale ressaltar que, ainda assim, a solução analítica não ilustra perfeitamente o comportamento real do escoamento devido às várias hipóteses assumidas de forma a tornar a solução das equações possível. Em um caso real, é indispensável uma análise numérica do reservatório com modelos de malha refinados o suficiente que permitam resultados precisos e dados obtidos de sondagens geofísicas as mais precisas possíveis, mas que são mais complexas em sua concepção e execução. Contudo, a solução analítica não é descartada da análise do reservatório justamente por fornecer uma boa estimativa de parâmetros de produção

com relativa facilidade. Mais adiante é explicado melhor como cada hipótese assumida afeta o resultado final da análise.

Nas análises propostas, foi utilizada a seguinte expressão de pressão para regime de fluxo radial transiente, cuja demonstração encontra-se no Anexo A deste documento (ROSA, *et al.*, 2006). A expressão resolvida para obter a equação a seguir foi a forma polar da equação de difusividade, Equação (2.76), sob as condições de contorno de fluxo de produção constante, pressão inicial constante ao longo do reservatório e pressão em um ponto suficientemente afastado do poço sendo igual à pressão inicial:

- $p(r, 0) = p_{t=0}, r > 0$ (condição de contorno inicial)
- $\lim_{r \rightarrow \infty} p(r, t) = p_{t=0}$ (condição de contorno externa)
- $q_w = cte$ (condição de contorno interna)

$$p(r, t) = p_{t=0} - \frac{q_w \mu B}{4\pi k h} E_i \left(\frac{\phi \mu c_t r^2}{4kt} \right) \quad (2.78)$$

Na Figura 2.3, é mostrado um esquema de um perfil de poço penetrando totalmente uma formação e em qual região do esquema atua cada variável.

A pressão é a energia primária para extração de óleo, isto é, o mecanismo responsável pelo deslocamento do óleo para a superfície. De forma geral, a energia de pressão fornecida ao fluido para que ocorra a elevação ocorre por descompressão dos fluidos e deslocamento dos fluidos por meio da injeção de outros fluidos (THOMAS, 2004). A Equação de Difusividade é usada para saber a pressão no reservatório, que é um dos principais parâmetros necessários que deve ser conhecido para estudo de viabilidade e extração de poços e gera importantes parâmetros de entrada para análises numéricas em etapas de estudo mais adiantadas de reservatório.

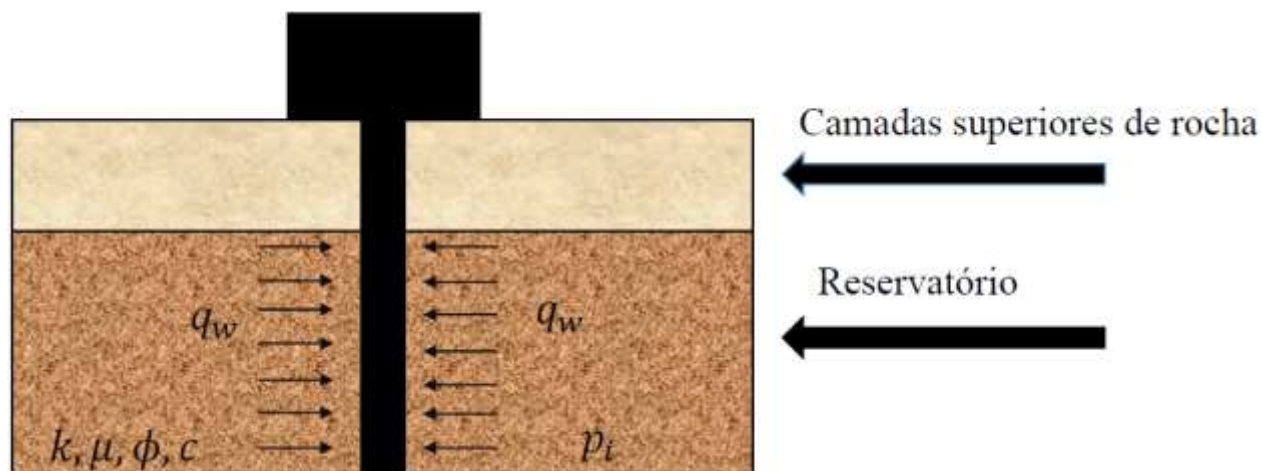


Figura 2.3 - Esquema de um poço penetrando uma formação rochosa e os parâmetros importantes do modelo fonte-linha.

2.4 HIPÓTESES DO MODELO

As hipóteses do modelo de solução analítica introduzem algumas fontes de erro no escoamento do fluido. As hipóteses utilizadas são: reservatório homogêneo, isotrópico, vazão do poço constante, fluxo monofásico, poço penetrando totalmente a formação, pequenos gradientes de pressão, fluido com compressibilidade pequena e constante, fluxo laminar, fluxo isotérmico, rocha com compressibilidade pequena e constante, forças capilares desprezíveis e fluidos e rochas não reagentes entre si (ROSA, *et al.*, 2006). Cabe uma breve análise sobre cada uma destas hipóteses sobre os resultados obtidos e como uma análise robusta lidaria com o problema. A Figura 2.4, que mostra genericamente um esquema de reservatório de petróleo, já ilustra a não-validade da hipótese de fluxo monofásico e rocha isotrópica e homogênea por meio das dobras estratigráficas e presença de 3 fluidos. A análise das hipóteses é apresentada a seguir:

- Reservatório homogêneo e isotrópico: sabe-se que, na prática, quase nunca se encontra reservatórios homogêneos e isotrópicos devido ao grande número de variáveis que influem na origem da formação e natureza dos materiais constituintes da rocha. Reservatórios estão sujeitos a fraturas, falhas e veios. Fraturas geralmente constituem caminhos preferenciais para a passagem de fluídos, falhas interpõem materiais de características diferentes em um mesmo reservatório ou impõem descontinuidades ao meio de percolação. Veios constituem

heterogeneidades na matriz rochosa. Nestas condições, estas hipóteses afetam diretamente a permeabilidade e porosidade da rocha, tornando-as variáveis.

- Hipótese de fluxo laminar: Quando a velocidade de fluxo aumenta, é possível que efeitos inerciais do escoamento aumentem e se tornem tão ou mais significantes que os efeitos viscosos, ocasionando em um padrão de fluxo turbulento e a equação de Darcy deixa de ser precisa para esta situação. Apesar deste tipo de situação ocorrer geralmente próximo à região do poço (o que muitas vezes pode ser incorporado ao efeito película), existem algumas formações com fraturas, principalmente a partir de rochas metamórficas e ígneas em que ocorre fluxo turbulento do fluido e uma análise não-darciniana passa a ser necessária (JIAHUI, *et al.*, 2010).
- Fluxo monofásico: Em reservatórios de petróleo, sempre possuímos mais de um tipo de fluido armazenado. Em alguns casos, o escoamento real envolve fluxo bifásico e até trifásico devido à associação de água, óleo e gás, principalmente gás dissolvido em óleo. Então, além de haver mais do que uma fase de fluido, a saturação das fases muda com a variação de pressão e extração de fluido do reservatório. Devido à interação entre fluidos e suas diferentes propriedades, bem como suas diferentes afinidades pelo material da matriz rochosa, uma análise multifásica de escoamento passa a ser necessária para um estudo real de reservatório. A formação possui diferentes permeabilidades relativas para cada fluido, devido à molhabilidade diferente de cada fase (que depende de cada fluido e da natureza da formação). Por último, sabe-se que gases escoam mais facilmente pela formação devido ao efeito Klinkenberg (escorregamento nas paredes do meio).
- Hipótese de fluido isotérmico: esta hipótese é razoável. Apesar do fluido não estar exatamente à mesma temperatura, os gradientes de temperatura são baixos e a massa do fluido é muito grande. Efeitos de diminuição de temperatura devido à abertura do poço ocorrem muito lentamente se comparados com o tempo de elevação do fluido. O principal parâmetro afetado por esta hipótese é a viscosidade.
- Rocha e fluido com compressibilidade pequena e constante: a compressibilidade da rocha e do óleo são, de fato, pequenas, mas podem não ser constantes. Contudo, por se tratar de valores pequenos, a hipótese é razoável.

- Pequenos gradientes de pressão: Esta hipótese é necessária para a resolução da Equação de Difusividade. De fato, normalmente os gradientes de pressão medidos são pequenos (ROSA, CARVALHO e XAVIER, 2006).

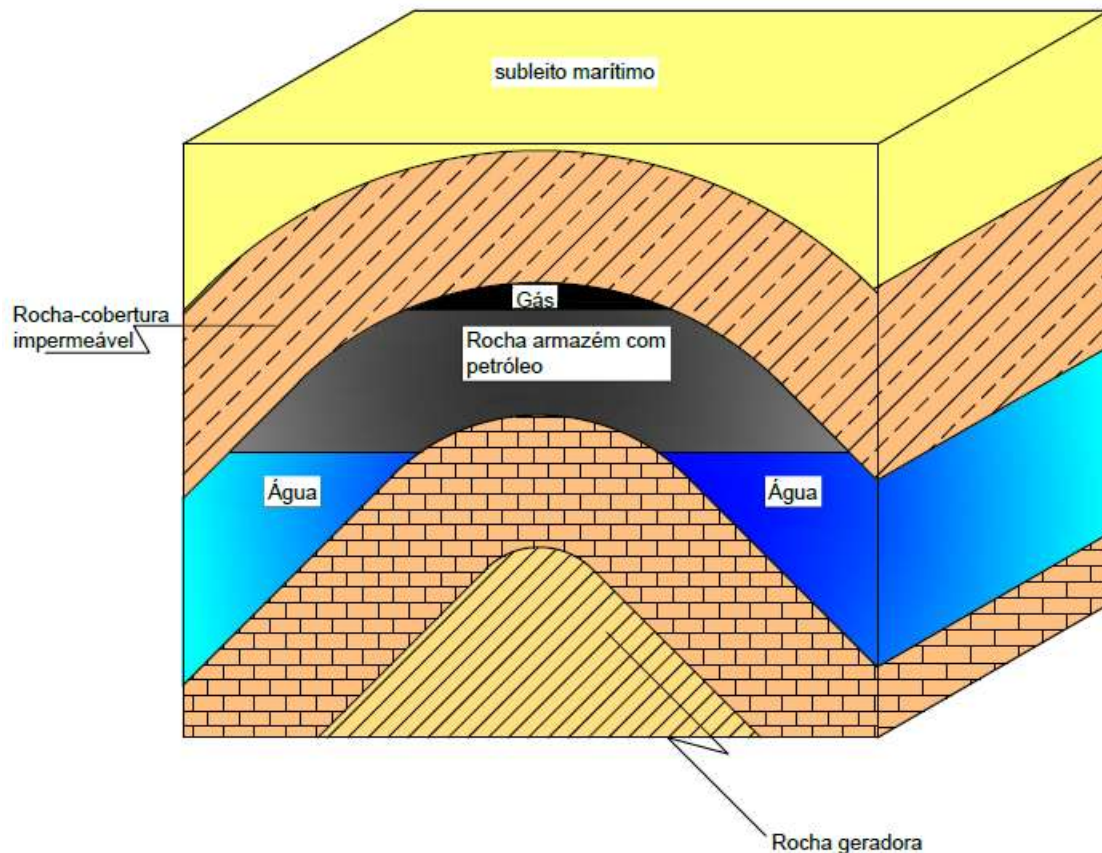


Figura 2.4 - Esquema de um reservatório genérico de petróleo

- Reação entre fluido e formação: Fluido e formação podem reagir mais de uma forma. A mais comum é, quando na presença de argila hidratável, a permeabilidade da formação aumenta quando se aumenta o teor de salinidade do fluido (ROSA, *et al.*, 2006).
- Negligência dos efeitos capilares e tensões superficiais: Nos casos em que há escoamento multifásico, os efeitos negativos desta hipótese no modelo se mostram mais presentes. Ao final do escoamento permanecerá uma pequena quantidade de óleo cuja extração só se dará com um aumento do gradiente de pressão. Esta saturação residual ocorre porque, não havendo mais continuidade na fase de óleo, o óleo remanescente permanecerá aderido à formação devido à

tensão superficial. Pode ocorrer ainda o aprisionamento de uma determinada quantidade de óleo quando ela é rodeada pela formação e água em um fenômeno conhecido como efeito Jamin.

- Vazão de extração constante: Normalmente adota-se duas formas diferentes de estudo utilizadas para o escoamento no poço. A primeira supões que a vazão de extração é constante e a segunda que a pressão no fundo do poço é constante. As duas podem ser consideradas válidas. É possível, por meio de processos de controle, manter um destes fatores constantes e o outro fator variável.
- Poço penetrando totalmente a formação: Busca-se, na perfuração de poços de forma a maximizar a área de extração do poço. Devido ao próprio processo construtivo de poços e por questões de controle contra possíveis fluxos excessivo e perigosos de hidrocarbonetos, somente uma parte do polo é aberta à extração. Isto influi em como as linhas da trajetória de fluxo chegam à abertura e no próprio formato e padrão das linhas.

2.5 A VARIAÇÃO DE PRESSÃO

Para os estudos realizados, define-se um parâmetro capaz de medir a energia disponível no reservatório que pode ser utilizada para a elevação de hidrocarbonetos. Define-se, então, a variação de pressão do reservatório, dada para qualquer ponto e instante de tempo a partir do início da produção:

$$\Delta p = p_{t=0} - p = \frac{q_w \mu B}{4\pi k h} E_i \left(\frac{\phi \mu c_i r^2}{4kt} \right) \quad (2.79)$$

Com base nesta equação, valem a seguinte observação: maiores variações de pressão indicam maior diferença de pressão entre a pressão inicial e a pressão atual do poço, o que quer dizer que há menos energia primária para extração de óleo disponível. Um reservatório em que, em um mesmo ponto, apresenta maiores variações de pressão que outros reservatórios semelhantes (mesma pressão inicial, quantidade e proporção de hidrocarbonetos) para um mesmo tempo é um reservatório no qual os mecanismos primários de extração de petróleo se esgotam mais rapidamente, sem necessariamente fornecer maior volume de óleo (porque a vazão de extração é constante). É interessante, do ponto de vista de extração, que as variações nos parâmetros gerem menor variação

de pressão no reservatório ao longo do tempo para que se mantenha o fluxo de hidrocarbonetos. Naturalmente, um reservatório com características interessantes também apresenta baixos valores, tanto de gradiente de variação de pressão quanto de variação de pressão, em pontos mais afastados para um tempo fixo.

Isto acontece pelo seguinte motivo: supondo o escoamento monofásico e, neste caso, sem influxo de fluido na fronteira do reservatório, quando o regime se estabilizar, ele alcançará o regime de escoamento pseudo-permanente. Assim, se a variação de pressão, para um tempo fixo, for alta ao longo da extensão do reservatório, haverá maior esgotamento da energia de produção do reservatório, atingindo-se um padrão no qual não há manutenção de energia primária e extração de óleo no reservatório e esgotando-se a produção mais rapidamente. Supondo-se vazões constantes, isto significa que o tempo em que é possível produzir à vazão estabelecida é menor do que se a variação de pressão ao longo da extensão fosse menor.

2.6 MÉTODO DA DIFERENÇAS FINITAS PARA MALHA RADIAL

Atualmente, existem três grandes classes de métodos numéricos utilizados na área de engenharia de reservatórios para efetuar simulações. São eles: Método dos Volumes Finitos, Método dos Elementos Finito e Método da Diferenças Finitas (FIROOZABADI e SONIER, 2007).

O Método dos Volumes Finitos baseia-se na aplicação das formas integrais das equações de fluxo para aproximar a solução ao problema. A aplicação do método é semelhante ao que é descrito mais adiante no Método das Diferenças Finitas (FIROOZABADI e SONIER, 2007).

O Método dos Elementos Finitos possui a concepção básica de aproximar a solução da equação ao invés de aproximar a própria equação. O domínio é dividido em subdomínios chamados de elementos (KASIRI e BASHIRI, 2010).

O Método das Diferenças Finitas é um método numérico de resolução de equações diferenciais amplamente utilizado em mecânica dos fluidos computacional. O método baseia-se na discretização do domínio por uma malha e na escrita de valores da função em pontos específicos por meio da expansão de séries de Taylor ao redor do ponto no qual pretende-se aferir o valor da função que satisfaz a equação diferencial. Desta forma, combinando-se séries de Taylor escrita para vários pontos da malha, pode-se obter diversas aproximações com diversas ordens de erro para as derivadas da função.

Poder-se-ia ter escolhido efetuar as análises por vários outros métodos numéricos além dos citados nos parágrafos anteriores, contudo preferiu-se o Método das Diferenças Finitas por sua aplicação tradicional na modelagem de transporte de fluidos. Pode-se resumir algumas vantagens e desvantagens do método a seguir (FIROOZABADI e SONIER, 2007):

- Vantagens: fácil implementação, fácil extensão para várias dimensões, boa compatibilidade com os aspectos físicos do fluxo em meio poroso;
- Desvantagens: Altamente dependente da malha, dificuldade de implementação para geometrias complexas, grande dispersão numérica associada ao erro de truncamento, pouca precisão no caso de meio heterogêneo com grandes contrastes de pressão capilar.

A escolha do método deve basear-se na natureza do problema e o tempo de computação gasto em conjunto com suas vantagens e desvantagens, porque os métodos disponíveis atualmente para a resolução de equações diferenciais parciais não cobrem todas as situações práticas encontradas (KASIRI e BASHIRI, 2010).

No presente estudo, utilizou-se uma formulação central no espaço e atrasada (implícita) no tempo e de malha radial, que modela o fenômeno de fluxo radial mais fielmente, cuja formulação matemática é mostrada no Anexo B. A Figura 2.5 ilustra, conceitualmente, a malha adotada, bem como as variáveis espaciais e o sentido convencionado de variação positiva destas.

Escolheu-se utilizar o método de forma implícita pois esta formulação garante estabilidade incondicional do processo. A restrição do passo de tempo e posição do método explícito representam sérias restrições ao método das diferenças finitas no caso de se utilizar malha não-uniforme, principalmente em regiões onde é necessário refino da malha, como é o caso de regiões próximas ao poço. Nestas regiões, a diminuição da área de drenagem e a manutenção de vazões constantes eleva o gradiente hidráulico, o que causa bruscas variações de pressão próximas ao poço e exige maior refino de malha próxima ao poço. Se a malha possui crescimento que permite a queda de pressão entre células aproximadamente igual, os erros do método são reduzidos drasticamente.

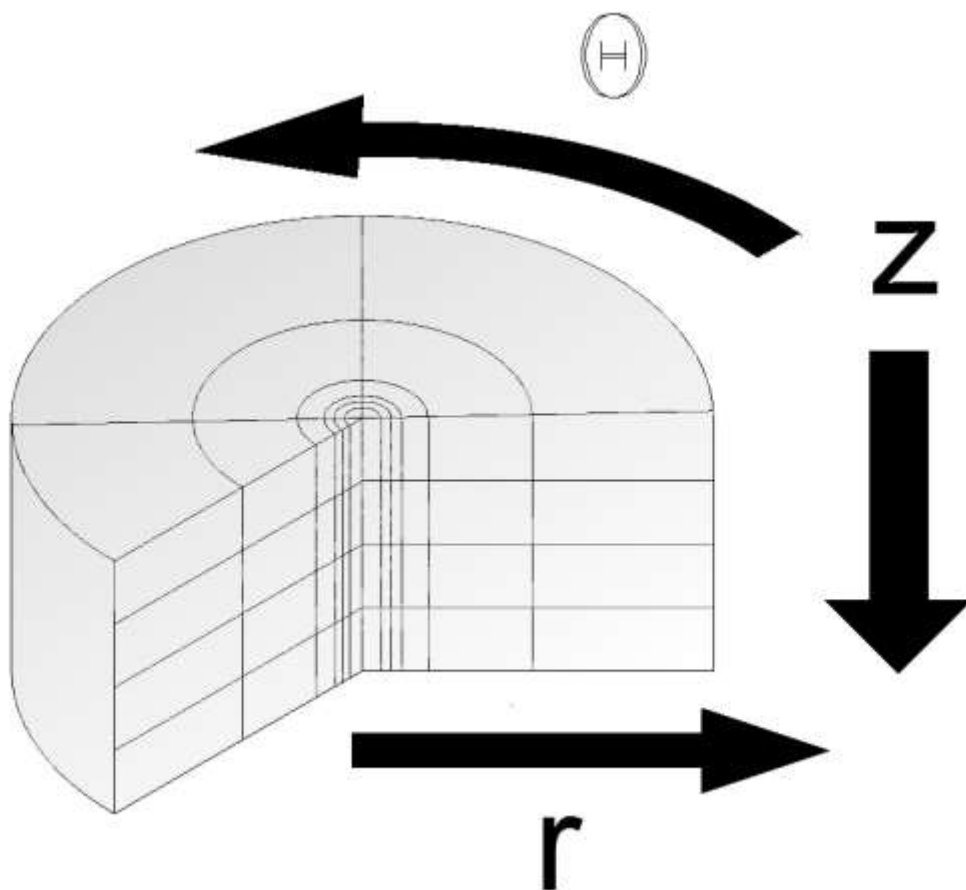


Figura 2.5 – Ilustração conceitual da malha de Diferenças Finitas.

Na equação final de diferenças finitas, a pressão no centro de cada célula é calculada com uma soma da sua própria pressão e as pressões das células vizinhas imediatas ajustadas por pesos que indicam o quanto cada pressão influencia na pressão da célula e igualando-se a soma a termos independentes. Os termos independentes englobam uma parcela referente a condições de contorno impostas, uma parcela que leva em conta a energia potencial gravitacional de cada célula e um termo de influência da pressão da célula no tempo anterior, que pode ser interpretado como uma inércia à mudança de pressão.

Os pesos que se atribui a pressão em cada célula são chamados de transmissibilidade. A transmissibilidade é denotada por $T_{i,j,k}^n$ e depende da malha adotada, de propriedades do fluido e do reservatório e são dados pela seguinte expressão:

$$T_{i,j,k}^n = \left(G \frac{1}{\mu B} \right)_{i,j,k}^n \quad (2.80)$$

onde,

G = fator geométrico que depende somente do formato da malha e engloba a permeabilidade das células $[M^{-1}LT]$;

V_b = volume da célula $[L^3]$;

i, j, k = índice naturais que representa a posição de cada célula na malha em cada dimensão;

n = índice natural que representa o passo de tempo no qual se efetuam os cálculos;

Δt = tamanho do passo de tempo $[T]$.

Expressões para calcular o fator geométrico dependem do formato da malha, podendo ser obtidas por combinações de séries de Taylor para qualquer formato de malha. As expressões de cálculo deste fator são fornecidas a seguir são indicadas na Tabela 2.1 para malhas cartesianas e malhas cilíndricas de crescimento geométrico.

Termos fracionários no índice da transmissibilidade indica que devem ser calculadas para a fronteira entre blocos da malha. Como a transmissibilidade é calculada por meio de propriedades conhecidas para o centro dos blocos em vez de suas fronteiras, faz-se uma média harmônica do termo geométrico entre dois blocos para que se possa obter valor das propriedades na fronteira. Utiliza-se a média harmônica devido a implicações da Lei de Darcy: o fluxo entre dois meios em série de propriedades constantes, mas diferentes entre si é calculado usando a média harmônica das permeabilidades. As expressões da Tabela 2.1 já incluem expressões com média harmônica. No caso dos termos de viscosidade e fator volume formação do óleo, estes termos são dependentes da pressão do reservatório, mas apresentam não-linearidade fracas com a pressão, e podem ser obtidos por média aritmética simples entre dois blocos calculada no tempo atrasado. Existem vários outros métodos de obter esta média, fugindo ao escopo deste estudo entrar neste mérito mais a fundo. Adicionalmente, sabe-se que valores de transmissibilidade quase não são afetados levando-se em conta a variação do fator volume-formação do óleo e da viscosidade para óleos sem gás dissolvido, podendo haver casos em que esta variação é de apenas 0,075% do valor correto da transmissibilidade (ERTEKIN, JAMAL e GREGORY, 2001), por isto não é justificável adotar tratamento rigoroso na avaliação da média destes termos. Nos cálculos efetuados, tomou-se a média

simples entre fator volume-formação do óleo para cada par de células envolvidas no cálculo, levando em conta a variação deste fator com a pressão e admitiu-se que a viscosidade não varia significativamente com a pressão. De fato, para óleos sem gás dissolvido, a viscosidade pode ser considerada constante sem maiores prejuízos aos cálculos (ERTEKIN, JAMAL e GREGORY, 2001). O fator volume-formação do óleo, por outro lado, pode ser calculado pela Equação (2.24).

Tabela 2.1 – Expressões para fator geométrico de acordo com a malha e a direção de fluxo (AZIZ e PEDROSA, 1986).

Malha, direção	Fator geométrico ($G_{i+1/2}$)	Fator geométrico ($G_{i-1/2}$)
Cilíndrica, Radial	$\frac{\Delta\theta_j\Delta z_k}{\frac{1}{k_{r_{i,j,k}}}\ln\left(\frac{r_{i+1/2}}{r_i}\right) + \frac{1}{k_{r_{i+1,j,k}}}\ln\left(\frac{r_{i+1}}{r_{i+1/2}}\right)}$	$\frac{\Delta\theta_j\Delta z_k}{\frac{1}{k_{r_{i-1,j,k}}}\ln\left(\frac{r_{i-1/2}}{r_{i-1}}\right) + \frac{1}{k_{r_{i,j,k}}}\ln\left(\frac{r_i}{r_{i-1/2}}\right)}$
Cilíndrica, Angular	$\frac{\ln\left(\frac{r_{i+1/2}}{r_{i-1/2}}\right)\Delta z_k}{\frac{\theta_{j+1/2} - \theta_j}{k_{\theta_{i,j,k}}} + \frac{\theta_{j+1} - \theta_{j+1/2}}{k_{\theta_{i,j+1,k}}}}$	$\frac{\ln\left(\frac{r_{i+1/2}}{r_{i-1/2}}\right)\Delta z_k}{\frac{\theta_{j-1/2} - \theta_{j-1}}{k_{\theta_{i,j-1,k}}} + \frac{\theta_j - \theta_{j-1/2}}{k_{\theta_{i,j,k}}}}$
Cilíndrica, Vertical	$\frac{\frac{\Delta\theta_j}{2}(r_{i+1/2}^2 - r_{i-1/2}^2)}{\frac{z_{k+1/2} - z_k}{k_{z_{i,j,k}}} + \frac{z_{k+1} - z_{k+1/2}}{k_{z_{i,j,k+1}}}}$	$\frac{\frac{\Delta\theta_j}{2}(r_{i+1/2}^2 - r_{i-1/2}^2)}{\frac{z_{k-1/2} - z_{k-1}}{k_{z_{i,j,k-1}}} + \frac{z_k - z_{k-1/2}}{k_{z_{i,j,k}}}}$
Cartesiana, direção x	$\frac{\Delta y_j\Delta z_k}{\frac{x_{i+1/2} - x_i}{k_{x_{i,j,k}}} + \frac{x_{i+1} - x_{i+1/2}}{k_{x_{i+1,j,k}}}}$	$\frac{\Delta y_j\Delta z_k}{\frac{x_{i-1/2} - x_{i-1}}{k_{x_{i-1,j,k}}} + \frac{x_i - x_{i-1/2}}{k_{x_{i,j,k}}}}$
Cartesiana, direção y	$\frac{\Delta x_i\Delta z_k}{\frac{y_{j+1/2} - y_j}{k_{y_{i,j,k}}} + \frac{y_{j+1} - y_{j+1/2}}{k_{y_{i,j+1,k}}}}$	$\frac{\Delta x_i\Delta z_k}{\frac{y_{j-1/2} - y_{j-1}}{k_{y_{i,j-1,k}}} + \frac{y_j - y_{j-1/2}}{k_{y_{i,j,k}}}}$
Cartesiana, direção z	$\frac{\Delta x_i\Delta y_j}{\frac{z_{k+1/2} - z_k}{k_{z_{i,j,k}}} + \frac{z_{k+1} - z_{k+1/2}}{k_{z_{i,j,k+1}}}}$	$\frac{\Delta x_i\Delta y_j}{\frac{z_{k-1/2} - z_{k-1}}{k_{z_{i,j,k-1}}} + \frac{z_k - z_{k-1/2}}{k_{z_{i,j,k}}}}$

O termo independente que denotar a influência da pressão no tempo anterior na pressão que se calcula é dado pela multiplicação entre o termo de pressão da célula no tempo anterior ao qual se calcula e um termo de armazenamento dado por:

$$\Gamma_{i,j,k}^{n+1} = \frac{V_b}{\Delta t} \frac{\phi^{n+1} c_t}{B^{n+1}} \quad (2.81)$$

onde, V_b é o volume da célula.

O termo da equação de energia potencial gravitacional tem origem na forma completa da Equação de Darcy. Este termo, similarmente ao termo de transmissibilidade, é aplicado para cada par de células envolvendo os cálculos da iteração atual. Ele é dado por:

$$\begin{aligned} Q_{Gi,j,k}^n &= A_{Gi,j,k}^n Z_{i,j,k+1} + B_{Gi,j,k}^n Z_{i,j,k-1} + N_{Gi,j,k}^n Z_{i,j+1,k} \\ &+ S_{Gi,j,k}^n Z_{i,j-1,k} + W_{Gi,j,k}^n Z_{i-1,j,k} + E_{Gi,j,k}^n Z_{i+1,j,k} + C_{Gi,j,k}^{n+1} Z_{i,j,k} \end{aligned} \quad (2.82)$$

onde,

$$A_{Gi,j,k}^n = A_{i,j,k}^n \gamma_{i,j,k+1/2}^{n+1} \quad (2.83)$$

$$B_{Gi,j,k}^n = B_{i,j,k}^n \gamma_{i,j,k-1/2}^{n+1} \quad (2.84)$$

$$N_{Gi,j,k}^n = N_{i,j,k}^n \gamma_{i,j+1/2,k}^{n+1} \quad (2.85)$$

$$S_{Gi,j,k}^n = S_{i,j,k}^n \gamma_{i,j-1/2,k}^{n+1} \quad (2.86)$$

$$W_{Gi,j,k}^n = W_{i,j,k}^n \gamma_{i+1/2,j,k}^{n+1} \quad (2.87)$$

$$E_{Gi,j,k}^n = E_{i,j,k}^n \gamma_{i-1/2,j,k}^{n+1} \quad (2.88)$$

$$C_{Gi,j,k}^{n+1} = - \left(A_{Gi,j,k}^n + B_{Gi,j,k}^n + N_{Gi,j,k}^n + S_{Gi,j,k}^n + W_{Gi,j,k}^n + E_{Gi,j,k}^n \right) \quad (2.89)$$

e

$$A_{i,j,k}^n = T_{i,j,k+1/2}^n \quad (2.90)$$

$$B_{i,j,k}^n = T_{i,j,k-1/2}^n \quad (2.91)$$

$$N_{i,j,k}^n = T_{i,j+1/2,k}^n \quad (2.92)$$

$$S_{i,j,k}^n = T_{i,j-1/2,k}^n \quad (2.93)$$

$$W_{i,j,k}^n = T_{i-1/2,j,k}^n \quad (2.94)$$

$$E_{i,j,k}^n = T_{i+1/2,j,k}^n \quad (2.95)$$

$$C_{i,j,k}^{n+1} = - \left(A_{i,j,k}^n + B_{i,j,k}^n + N_{i,j,k}^n + S_{i,j,k}^n + W_{i,j,k}^n + E_{i,j,k}^n + \frac{\Gamma_{i,j,k}^{n+1}}{\Delta t} \right) \quad (2.96)$$

Desta forma, a equação que descreve numericamente o caso em estudo é:

$$\begin{aligned} & A_{i,j,k}^n p_{i,j,k+1}^{n+1} + B_{i,j,k}^n p_{i,j,k-1}^{n+1} + N_{i,j,k}^n p_{i,j+1,k}^{n+1} + \\ & S_{i,j,k}^n p_{i,j-1,k}^{n+1} + W_{i,j,k}^n p_{i+1,j,k}^{n+1} + E_{i,j,k}^n p_{i-1,j,k}^{n+1} + C_{i,j,k}^{n+1} p_{i,j,k}^{n+1} = Q_{i,j,k}^n \end{aligned} \quad (2.97)$$

onde,

$$Q_{i,j,k}^n = - \left(\frac{\Gamma_{i,j,k}^{n+1}}{\Delta t} p_{i,j,k}^n + q_{sc}^{n+1} - Q_{Gi,j,k}^n \right) \quad (2.98)$$

A expansão da Equação (2.97), se agrupado em um único sistema linear, for um sistema esparso $(n_i \times n_j \times n_k) \times (n_i \times n_j \times n_k)$ que deve ser resolvido para $p_{i,j,k}^{n+1}$. Da mesma forma que na equação analítica, deve-se impor condições de contorno ao sistema para que se obtenha uma única solução.

A condição de contorno de pressão inicial é dada mudando os valores $p_{i,j,k}^1$ para a pressão inicial.

A condição de contorno de reservatório muito grande é implementada adotando-se um reservatório de raio muito grande e fixando-se o valor da pressão na última célula igual à pressão inicial. Por último, a condição de contorno de vazão de extração constante é obtida substituindo-se o termo de vazão q_{sc} nas células que estão com uma das faces em contato com o poço. Assim sendo, substitui-se a vazão q_{sc} nestas células. As células nas quais se substitui este termo dependem da numeração de células adotada.

Deve-se atentar ao fato de que, caso deseja-se adotar uma malha radial, deve-se seguir algumas regras para garantir resultados adequados. Lista-se a seguir as restrições:

1. A Malha deve crescer geometricamente:

$$r_{i+1} = \alpha_{lg} r_i \quad (2.99)$$

2. A fronteira entre células é descrita pela seguinte equação:

$$r_{i+1/2} = \frac{r_{i+1} - r_i}{\ln \left(\frac{r_{i+1}}{r_i} \right)} \quad (2.100)$$

De acordo com Ertekin *et al.*, 2001, a Equação (2.99) é utilizada para manter a queda de pressão ao longo de todas as células aproximadamente igual e a Equação (2.100) é utilizada para garantir igualdade entre o fluxo calculado pela equação discreta obtida e aquele obtido por meio da Lei de Darcy. As subseções que seguem dedicam-se a justificar o emprego de tais restrições à malha adotada.

2.6.1 CRESCIMENTO GEOMÉTRICO DA MALHA

No caso de fluxo radial, incompressível e estável, a vazão é descrita pela seguinte aplicação da Equação de Darcy:

$$q = \frac{-2\pi khr}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (2.101)$$

Após deparar as variáveis, integrar a equação entre um bloco i e o seu sucessivo $i + 1$ e rearranjar os termos, pode-se escrever:

$$\ln \left(\frac{r_{i+1}}{r_i} \right) = \frac{-2\pi khr}{q\mu} (p_{i+1} - p_i) \quad (2.102)$$

Se a queda de pressão entre blocos é constante, o lado direito da equação é constante. Neste caso, tomando-se a exponencial da equação:

$$\frac{r_{i+1}}{r_i} = \exp\left(\frac{-2\pi khr}{q\mu}(p_{i+1} - p_i)\right) \quad (2.103)$$

Como o lado direito, da Equação (2.103) é constante, pode-se fazer:

$$\alpha_{lg} = \exp\left(\frac{-2\pi khr}{q\mu}(p_{i+1} - p_i)\right) \quad (2.104)$$

e

$$r_{i+1} = \alpha_{lg} r_i \quad (2.105)$$

2.6.2 POSIÇÃO DOS LIMITES DA CÉLULAS

Partindo-se da Equação (2.101) e tomando a aproximação da equação por diferenças finitas central em torno do ponto $i + 1/2$:

$$q = \frac{-2\pi khr_{i+1/2}}{\mu B} \left(\frac{p_{i+1} - p_i}{r_{i+1} - r_i} \right) \quad (2.106)$$

Que pode ser reescrita por:

$$\frac{r_{i+1} - r_i}{r_{i+1/2}} = \frac{-2\pi khr_{i+1/2}}{\mu B} (p_{i+1} - p_i) \quad (2.107)$$

Para que se tenham equações contínua e discreta iguais, a Equação (2.107) deve ser igual à equação (2.102). Por conseguinte:

$$\frac{r_{i+1} - r_i}{r_{i+1/2}} = \ln\left(\frac{r_{i+1}}{r_i}\right) \quad (2.108)$$

e

$$r_{i+1/2} = \frac{r_{i+1} - r_i}{\ln\left(\frac{r_{i+1}}{r_i}\right)} \quad (2.109)$$

Todos os procedimentos adotados para a implementação de diferenças finitas para o estudo garantem a sua estabilidade, convergências e consistências, como os resultados do Capítulo 4 mostram.

Outra implicação desta adoção para os limites das células é que os limites são posicionados de forma a crescer geometricamente a partir do raio inicial, pois, da Equação (2.99), a Equação (2.109) se torna:

$$r_{i+1/2} = r_i \frac{\alpha_{lg} - 1}{\ln(\alpha_{lg})} \quad (2.110)$$

A Equação (2.110) é claramente válida para r_1 . Assim, é fácil perceber que a série de fronteiras cresce geometricamente a partir da primeira fronteira do raio inicial dado, respeitando as mesmas regras dos centros das células.

3 METODOLOGIA

Os passos adotados para cumprir os objetivos propostos estão listados a seguir.

O primeiro passo é utilizar a Equação (2.79) para prever o comportamento da energia disponível para a elevação de fluido no tempo e na distância até o centro do poço. Por meio da utilização do software *Mathematica Wolfram* (WOLFRAM RESEARCH, 2015) plota-se uma curva para a variação de pressão em tempo fixo (adotado arbitrariamente como 30 dias) variando com a distância ao poço e uma curva com posição fixa (adotada arbitrariamente em 300 m a partir do centro do poço) variando com o tempo a partir do início da produção.

A análise será feita com dados reais obtidos do livro *Fundamento de Engenharia de Reservatório* (ROSA, *et al.*, 2006). Os dados são apresentados na Tabela 3.1:

Tabela 3.1 - dados usados no estudo de reservatório

Parâmetro	Valor	Unidade
Permeabilidade	$9,87 \times 10^{-14}$	m^2
Viscosidade	3×10^{-3}	$Pa \times s$
Vazão de extração	35	m^3/dia
Espessura da formação	4	m
Porosidade	0,2	Adimensional
Compressibilidade	$1,33 \times 10^{-9}$	Pa^{-1}
Raio do poço	0,1	m
Fator Volume-Formação do óleo	1,25	m^3/m^3_{std}
Peso específico medido em condições de reservatório	8700	N/m^3

Também será feita uma análise do comportamento que as curvas apresentam, propondo-se uma explicação física para o aspecto que elas assumem e como a posição delas varia no plano de acordo com a variação dos parâmetros. Para isto, os valores dados na Tabela 3.1 serão variados em faixas de valores razoáveis para reservatórios e serão traçadas 5 curvas para cada parâmetro.

Os parâmetros estudados são a permeabilidade, viscosidade, vazão de extração, espessura, porosidade e compressibilidade.

- Variação da pressão com a permeabilidade: Para este estudo, plota-se um conjunto de cinco gráficos em um mesmo plano da variação de pressão no tempo para cinco valores diferentes da permeabilidade e um conjunto de cinco gráficos da variação da pressão versus a distância ao centro do poço para cinco valores diferentes da permeabilidade.
- Variação da pressão com a viscosidade: Para este estudo, plota-se um conjunto de cinco gráficos em um mesmo plano da variação de pressão no tempo para cinco valores diferentes da

viscosidade e um conjunto de cinco gráficos da variação da pressão versus a distância ao centro do poço para cinco valores diferentes da viscosidade.

- Variação da pressão com a espessura da formação: Para este estudo, plota-se um conjunto de cinco gráficos em um mesmo plano da variação de pressão no tempo para cinco valores diferentes da espessura da formação e um conjunto de cinco gráficos da variação da pressão versus a distância ao centro do poço para cinco valores diferentes da espessura da formação.
- Variação da pressão com a porosidade: Para este estudo, plota-se um conjunto de cinco gráficos em um mesmo plano da variação de pressão no tempo para cinco valores diferentes da porosidade e um conjunto de cinco gráficos da variação da pressão versus a distância ao centro do poço para cinco valores diferentes da porosidade.
- Variação da pressão com a compressibilidade: Para este estudo, plotam-se um conjunto de cinco gráficos em um mesmo plano da variação de pressão no tempo para cinco valores diferentes da compressibilidade e um conjunto de cinco gráficos da variação da pressão versus a distância ao centro do poço para cinco valores diferentes da compressibilidade.

Vale ressaltar que os cinco valores diferente de cada parâmetro analisado listados nos procedimentos acima serão obtidos de forma que a diferença entre valores consecutivos permanecesse a mesma e, assim, obtivesse uma resposta dos gráficos que evidencia o quão significativa uma variação em cada parâmetro afeta a pressão. Os gráficos também serão traçados sem levar-se em conta o tempo necessário para mudança do regime, isto é, supondo escoamento transiente durante todo o período de tempo analisado.

Por fim, utiliza-se a formulação de diferenças finitas apresentada na Seção 2.6 para obter curvas de variação de pressão próximas àquelas obtidas nos gráficos de variação de pressão VS tempo e variação de pressão VS distância para $r=300\text{m}$ e $t=10$ dias. O método é utilizado para obter a variação de pressão em vez da pressão do reservatório, que é a solução da equação discretizada propriamente dita. Para se obter o parâmetro de estudo, então, resolve-se a equação para pressão inicial nula e obtém-se o negativo dos valores obtidos, desta forma, obtém-se a variação de pressão em vez da pressão. Como o modelo numérico é dado para 3 dimensões enquanto o modelo analítico é avaliado em 1 dimensão, ele deve ser capaz de simular os resultados do modelo analítico quando impostas as mesmas hipóteses. Neste caso, desconsiderou-se gradientes gravitacionais, mudança do fator volume formação do óleo, porosidade e viscosidade de fluido com o tempo e posição e

tomou-se um tensor de permeabilidade constante. Para se verificar a validade do modelo, adotou-se número de células nas direções θ e z maiores do que 1.

Além disto, uma vez que o método numérico exige que o reservatório tenha dimensões finitas, enquanto o modelo analítico permite dimensões infinitas, procurou-se saber qual o valor do raio a partir do qual pode-se considerar que a pressão no reservatório é praticamente a inicial. Para isto, usa-se o modelo analítico para obter valores de variação de pressão muito próximo de zero em diferentes tempos e traçou-se a curva que ilustra tal relação. Por meio da análise desta curva, pode-se obter, para qualquer tempo, o raio no qual a pressão é próxima o suficiente da inicial. Modelou-se uma malha com raio externo igual ao raio encontrado e fixou-se o valor da pressão na última célula no valor da pressão inicial. Tal procedimento é adotado para que os resultados se tornem o mais fiel o possível do modelo analítico.

Posteriormente, relaxa-se as hipóteses de gradientes gravitacionais nulos, permeabilidade homogênea e isotrópica e mudança do fator volume formação do óleo, porosidade com o tempo e posição e plota-se as soluções obtidas contra aquelas do modelo analítico para aferir as mudanças. Por último, cria-se um tensor de permeabilidades variáveis para cada célula e afere-se a capacidade da rotina de simular casos complexos.

A escolha do *Mathematica Wolfram* para tal estudo ocorre pela facilidade de implementação de expressões matemáticas no software, geração de gráficos fácil e pela vasta biblioteca implementada na linguagem.

4 RESULTADOS

4.1 VARIAÇÃO DA PRESSÃO COM O TEMPO

A partir da solução analítica, traça-se o gráfico da variação da pressão no tempo, quando $r = 300$ m (Figura 4.1).

No início, o reservatório está sob a mesma pressão inicial, com a abertura do poço, a variação de pressão aumenta. Inicialmente, a variação de pressão em um ponto suficientemente afastado do poço permanecerá próxima de zero por um determinado tempo, sem que haja influência do gradiente de pressão decorrente da abertura do poço. Após tempo suficiente, a variação de pressão passa a ser afetada pela abertura do poço e seu valor começa a aumentar. Se não for considerado

tempo suficiente, então, uma pequena região do gráfico acusará variação de pressão muito próxima de valor nulo. Depois de certo tempo, o regime de fluxo muda para regime pseudo-permanente ou permanente.

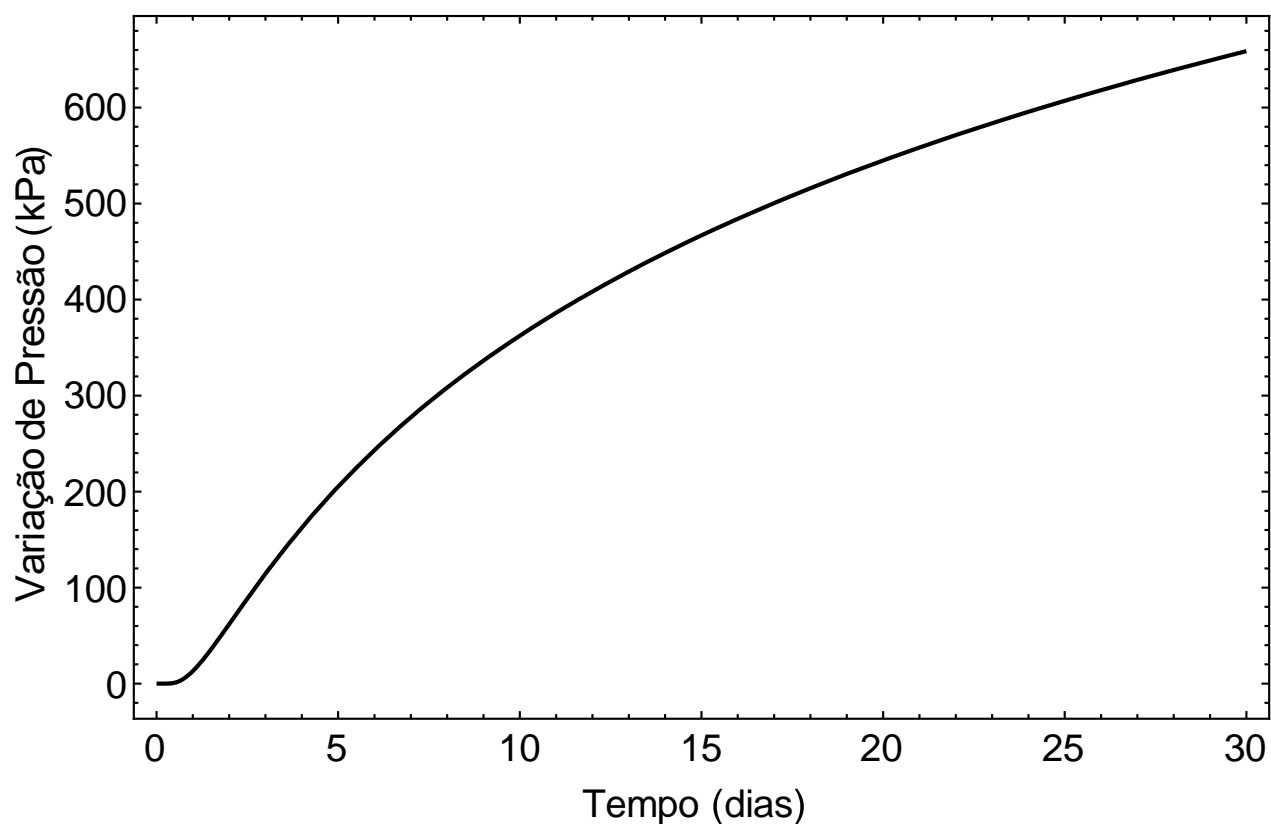


Figura 4.1. Variação de pressão no tempo para $r=300$ m.

4.2 VARIAÇÃO DA PRESSÃO COM A POSIÇÃO

À medida que se aproxima do reservatório, é de se esperar que a variação de pressão seja maior que a variação medida em pontos mais distantes (Figura 4.2), decorrente da extração de hidrocarbonetos daquela região primeiro.

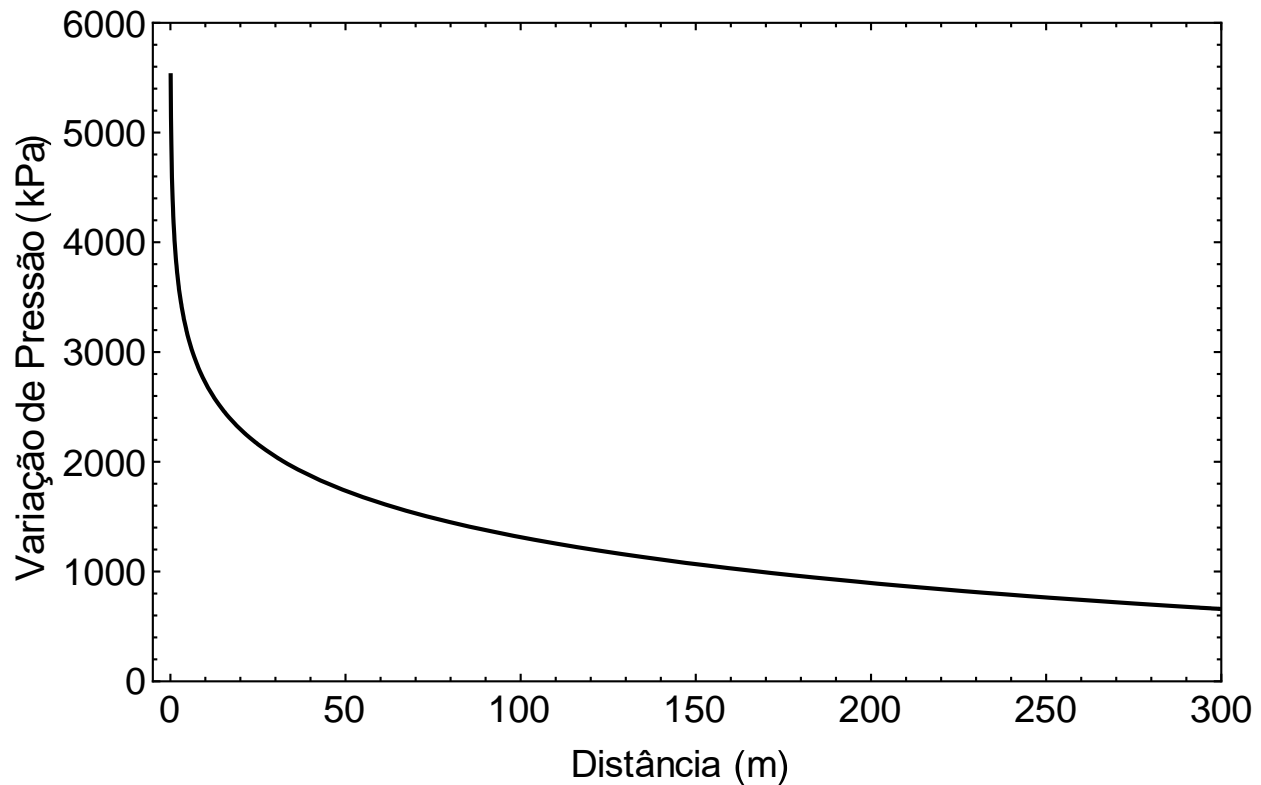


Figura 4.2. Variação de pressão na posição para $t=30$ dias.

Dependendo do quão distante for tomado o ponto de análise do poço, haverá uma região na qual a variação de pressão indicada é muito próxima de zero.

4.3 VARIAÇÃO DA PRESSÃO COM A PERMEABILIDADE.

Quanto maior a permeabilidade da rocha a um fluido, maior o fluxo em direção ao poço. Este fato resulta em uma maior rapidez com a qual as condições de contorno impostas afetarão o fluido e maior facilidade de extração de fluido. Por esse motivo, para maiores permeabilidades (Figura 4.3), o gradiente da variação de pressão tende a ser maior em instantes iniciais e menor depois de certo período.

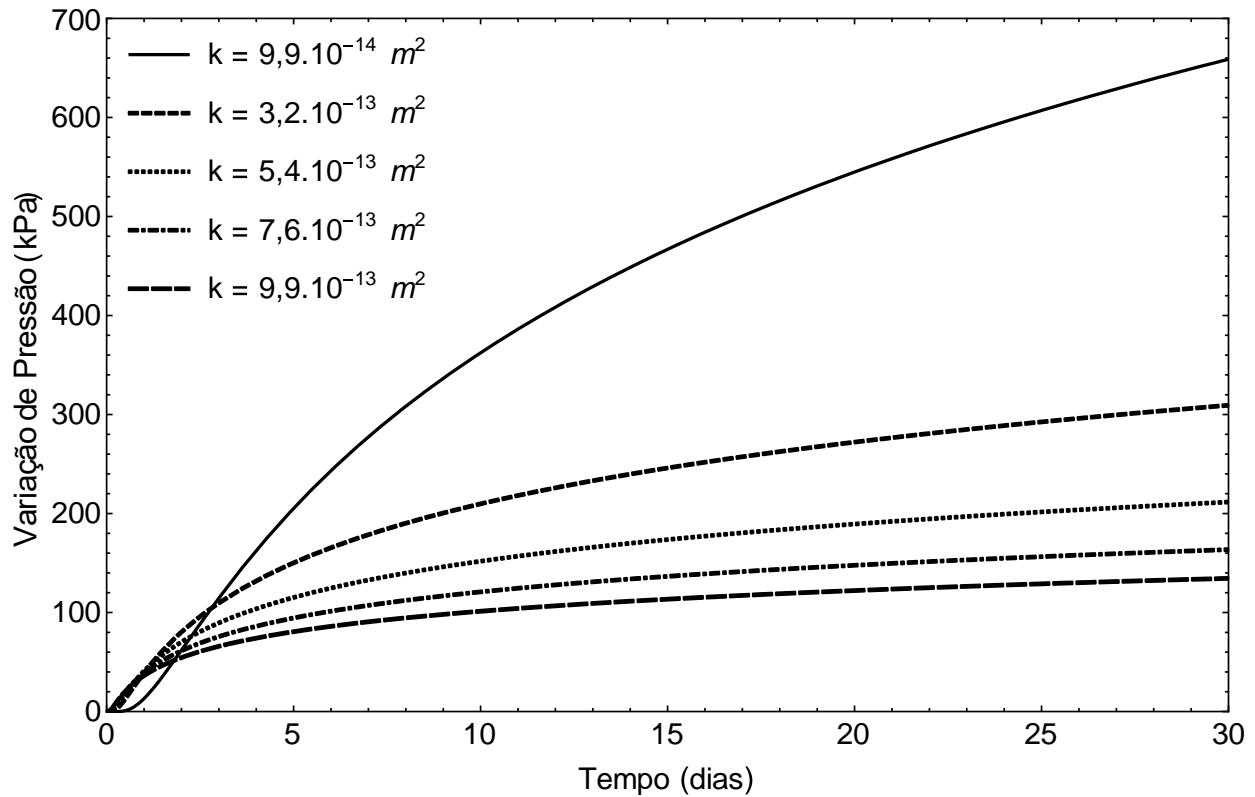


Figura 4.3. Variação de pressão no tempo para $r=300$ m e diferentes valores de permeabilidade.

O gradiente de pressão também é maior em módulo para pontos próximos ao poço e menor em regiões mais distantes (Figura 4.4). Para reservatórios com permeabilidades maiores, o tempo no qual o fluxo permanece em regime transiente é menor, pela maior facilidade de propagação da perturbação ao longo da extensão da massa de fluido. Por último, a variação de pressão em termos absolutos atinge valores menores em alta permeabilidade.

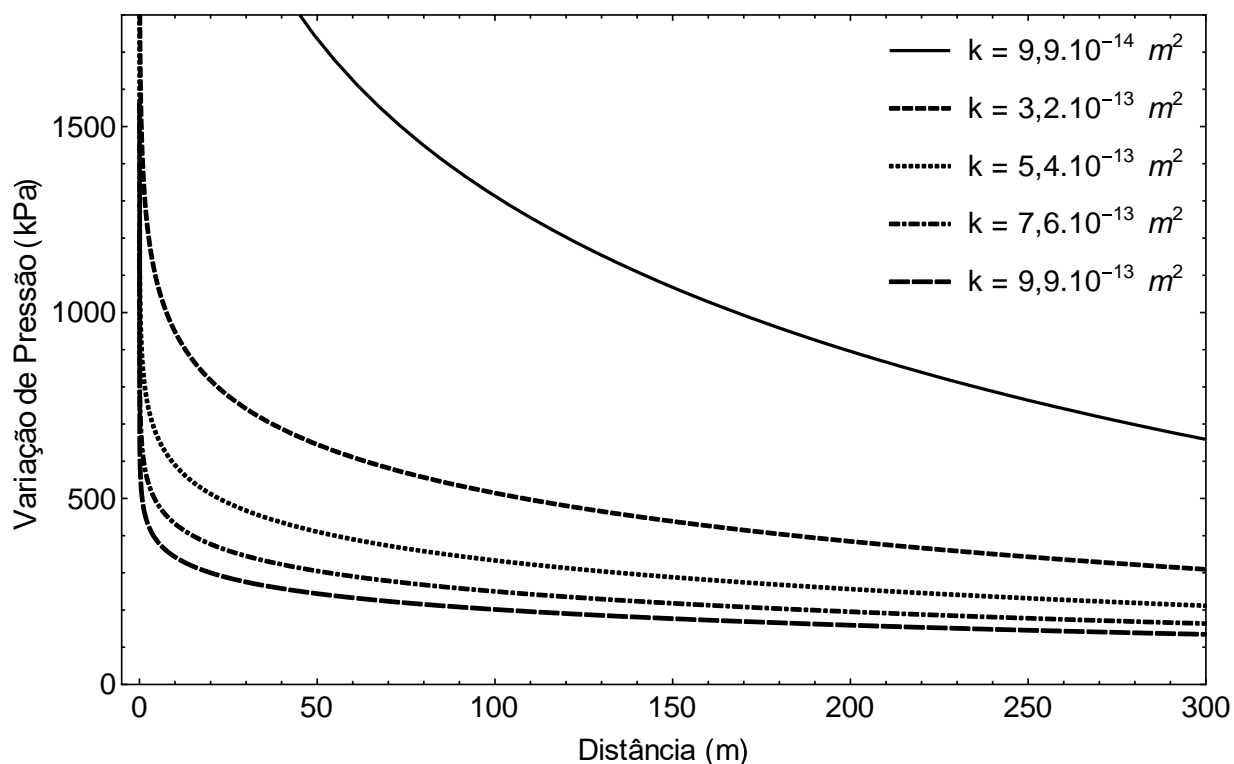


Figura 4.4. Variação de pressão na distância para $t=30$ dias e diferentes valores de permeabilidade.

4.4 VARIAÇÃO DA PRESSÃO COM A VISCOSIDADE DO FLUIDO.

Um aumento na viscosidade tem efeito contrário ao aumento da permeabilidade. Com uma maior viscosidade, o fluxo em direção ao reservatório é dificultado, sendo necessária maior energia para que o fenômeno ocorra. Neste caso, o efeito causado pela condição de contorno se propaga mais lentamente (Figura 4.5). Quanto maior a viscosidade, maior será a variação de pressão no tempo, em decorrência da lentidão em que as condições de contorno se propagam.

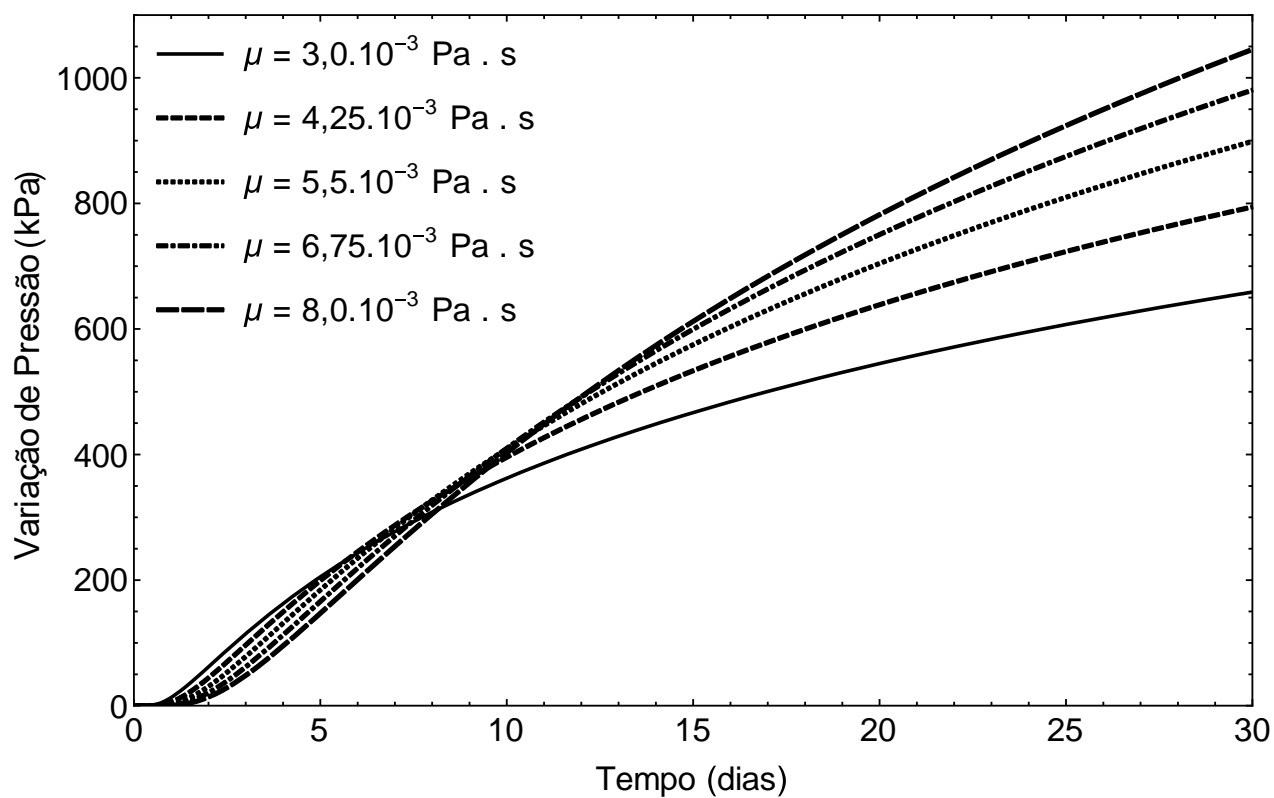


Figura 4.5. Variação de pressão no tempo para $r=300$ m para diferentes valores de viscosidade.

Por conseguinte, o gradiente de variação de pressão terá variações mais uniformes e valores absolutos maiores, para viscosidades altas. Quanto maior a viscosidade, maior será a variação de pressão ao longo da extensão do reservatório, pois é mais difícil impor condições de extração ao fluido (Figura 4.6).

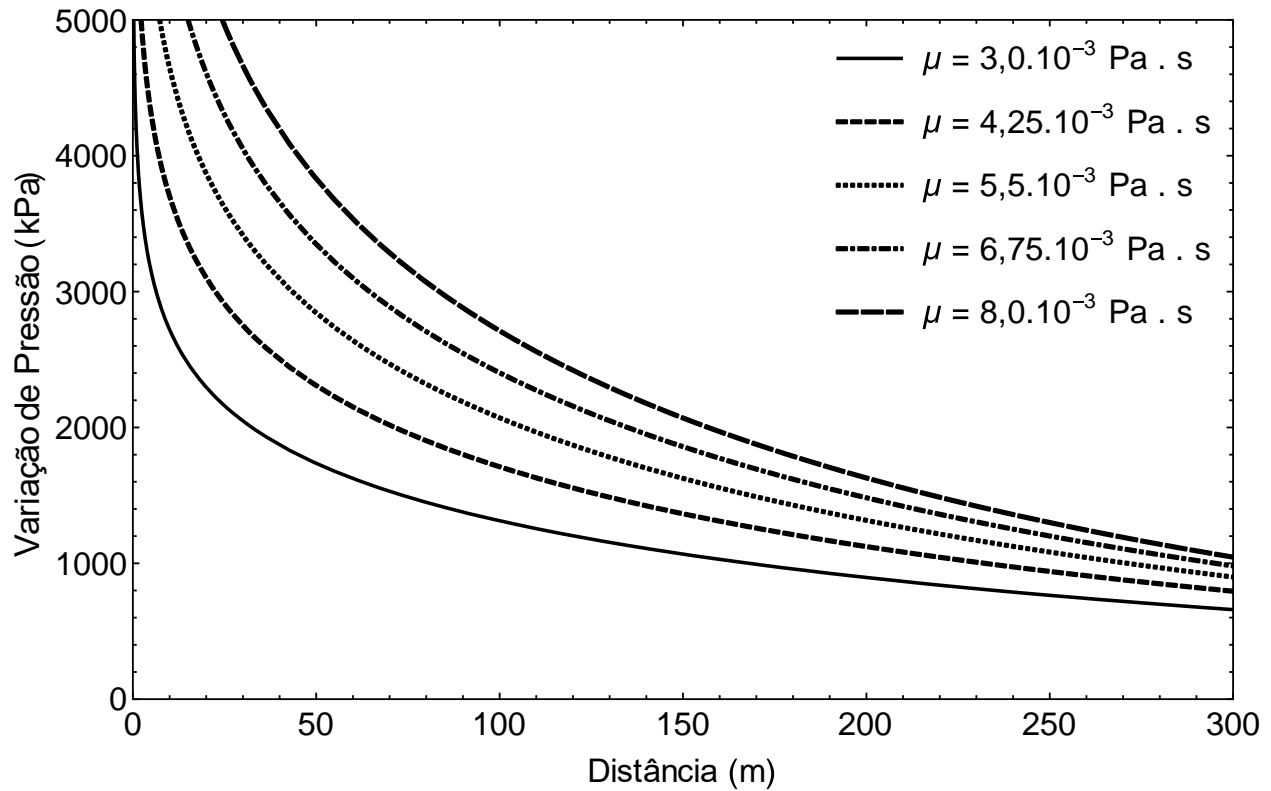


Figura 4.6. Variação de pressão na distância para $t=30$ dias e diferentes valores de viscosidade.

4.5 VARIAÇÃO DA PRESSÃO COM A ESPESSURA DO RESERVATÓRIO.

Reservatórios mais profundos têm maior área de drenagem para poços verticais. Quanto menor a espessura do poço, maior a variação de pressão imposta ao reservatório, tornando a extração mais difícil (Figura 4.7). Em alguns casos, a extração pode tornar-se inviável por meio de poços verticais, exigindo-se um grande número de perfurações de um mesmo reservatório para que se possa obter produção de óleo satisfatória, o que pode justificar o emprego de poços horizontais. Maiores espessuras significam maiores áreas na qual pode-se ocorrer a transmissão da diferença de pressão entre exterior e reservatório.

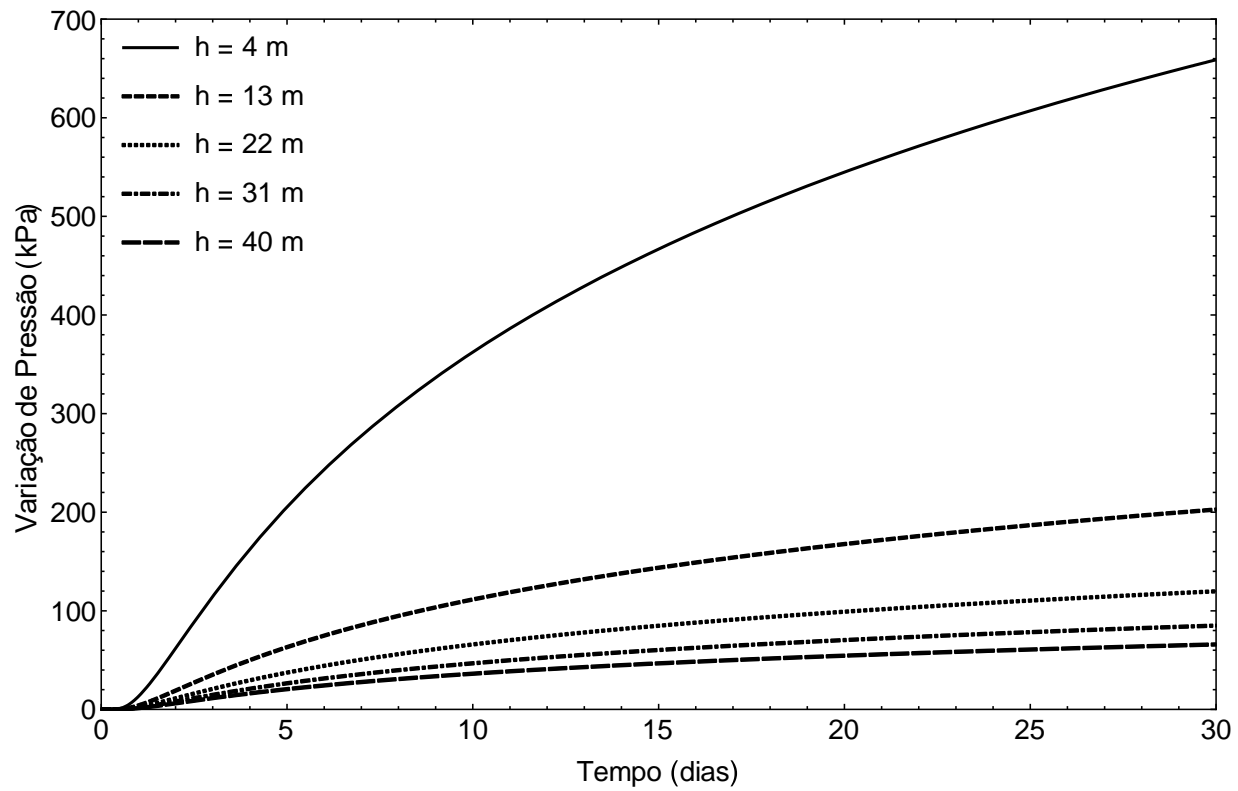


Figura 4.7. Variação de pressão no tempo para $r=300$ m e diferentes valores de espessura de formação.

Também, pode-se perceber pela Figura 4.8 que quanto menor o comprimento do poço, o gradiente da variação de pressão é menor. Ao longo da extensão do reservatório, grandes espessuras implicam em menores variações de pressão.

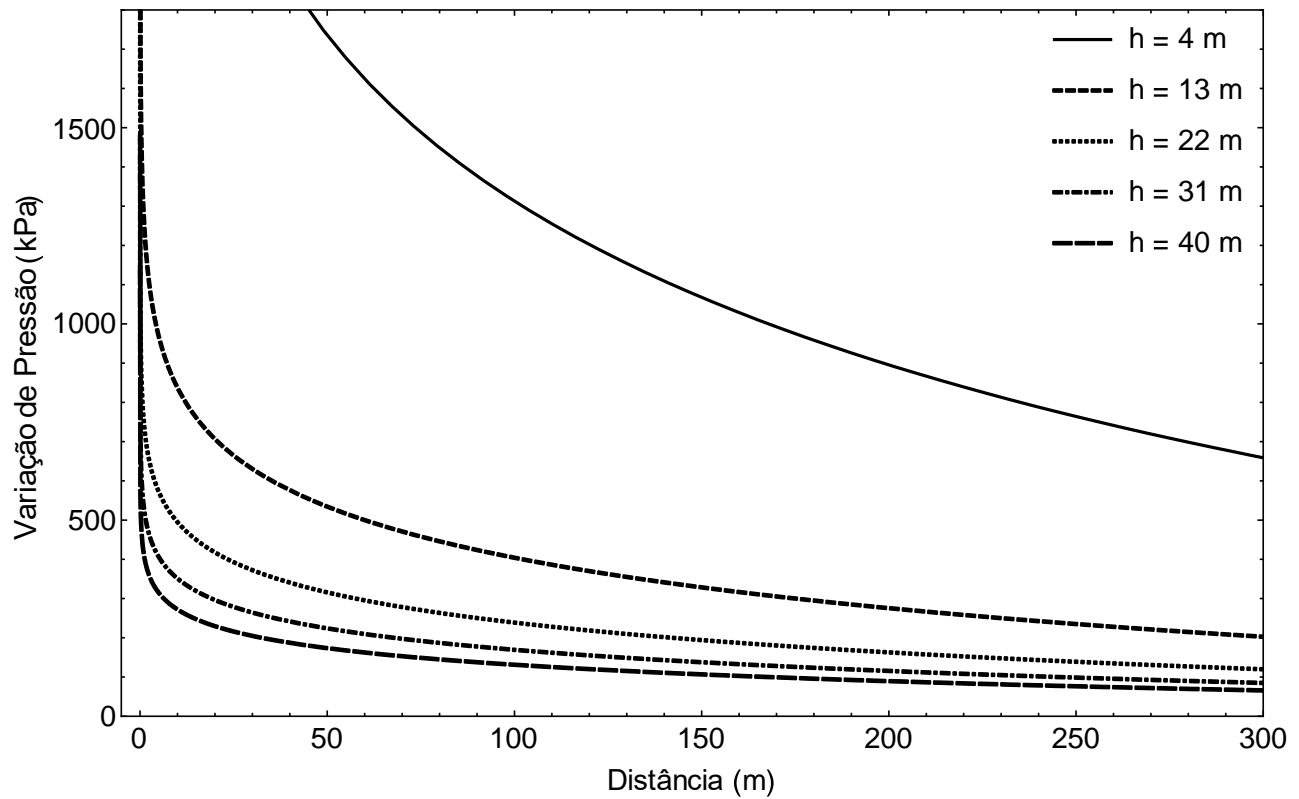


Figura 4.8. Variação de pressão na posição para $t=30$ dias e diferentes valores de espessura de formação.

4.6 VARIAÇÃO DA PRESSÃO COM A POROSIDADE DO MEIO.

O comportamento do poço depende se os poros formam um caminho preferencial na direção da extração ou não. Se for considerado que o aumento de porosidade é distribuído uniformemente na formação rochosa, há um aumento da permeabilidade. Com isso, tem-se um efeito similar ao descrito no aumento de permeabilidade, mas em menor intensidade (Figura 4.9 e Figura 4.10), devido ao fato de que distribuir a porosidade uniformemente não implica necessariamente em uma distribuição de vazios que majora a permeabilidade. Na prática, alguns vazios não influenciarão em nada a permeabilidade, como é o caso de formação de pequenos canais verticais. Vê-se, pelos gráficos a seguir, uma diminuição da variação de pressão ao longo do tempo e da extensão do reservatório para maiores porosidades.

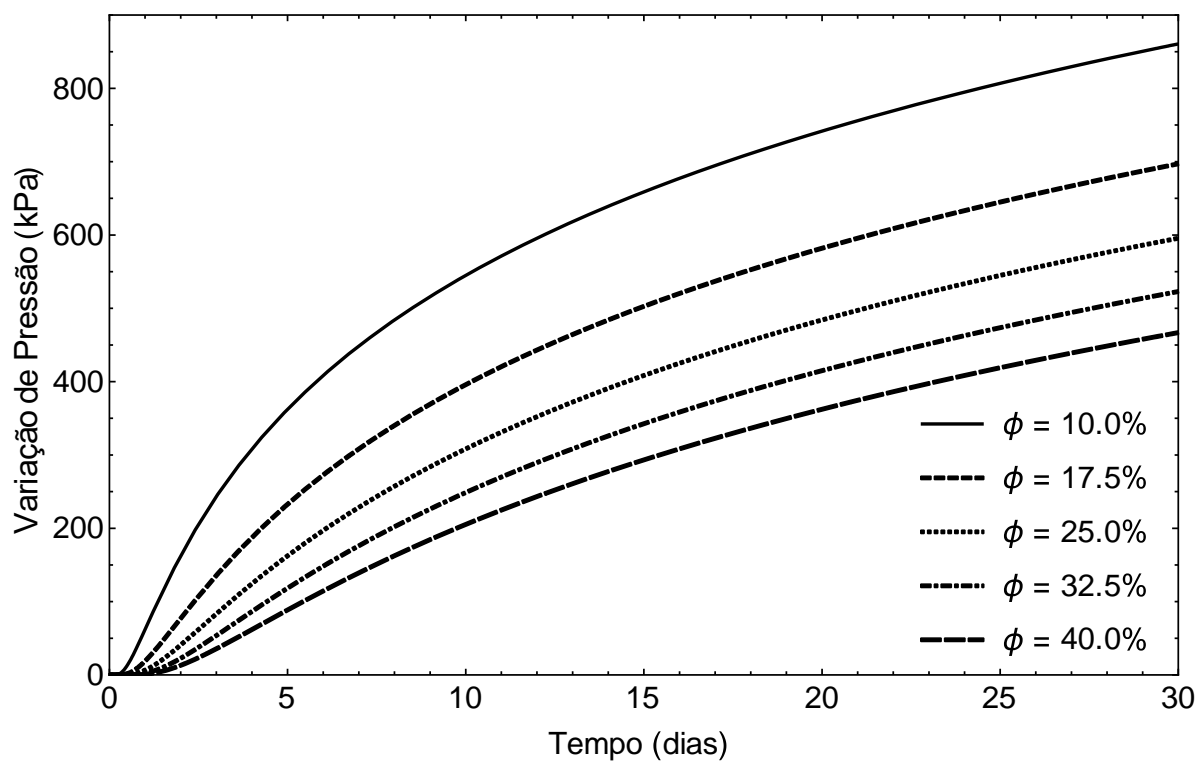


Figura 4.9. Variação de pressão no tempo para $r=300$ m e diferentes valores de porosidade.

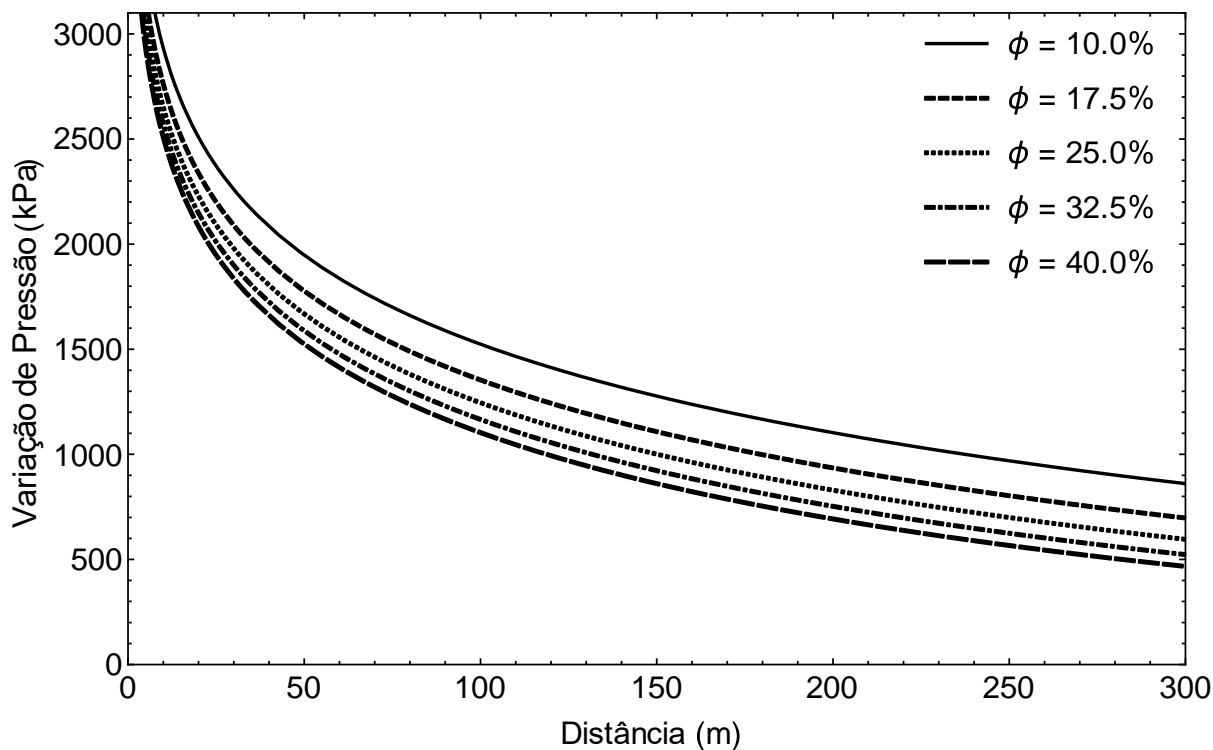


Figura 4.10. Variação de pressão na posição para $t=30$ dias e diferentes valores de porosidade.

4.7 VARIAÇÃO DA PRESSÃO COM A COMPRESSIBILIDADE DA FORMAÇÃO.

A compressibilidade total correlaciona quanto rocha e fluido sofrem deformação sob tensões. A deformação destes dois materiais é uma forma de armazenamento de energia proveniente da pressão do fluido na forma de deformação, como energia potencial. Ao abrir um poço, a queda de pressão alivia as tensões nos materiais (fluido e matriz rochosa) do reservatório, o que causa uma pequena expansão inicial. Esta expansão é responsável por atenuar a queda de pressão no reservatório com o tempo (Figura 4.11), melhorando a produção no poço como uma reserva de energia.

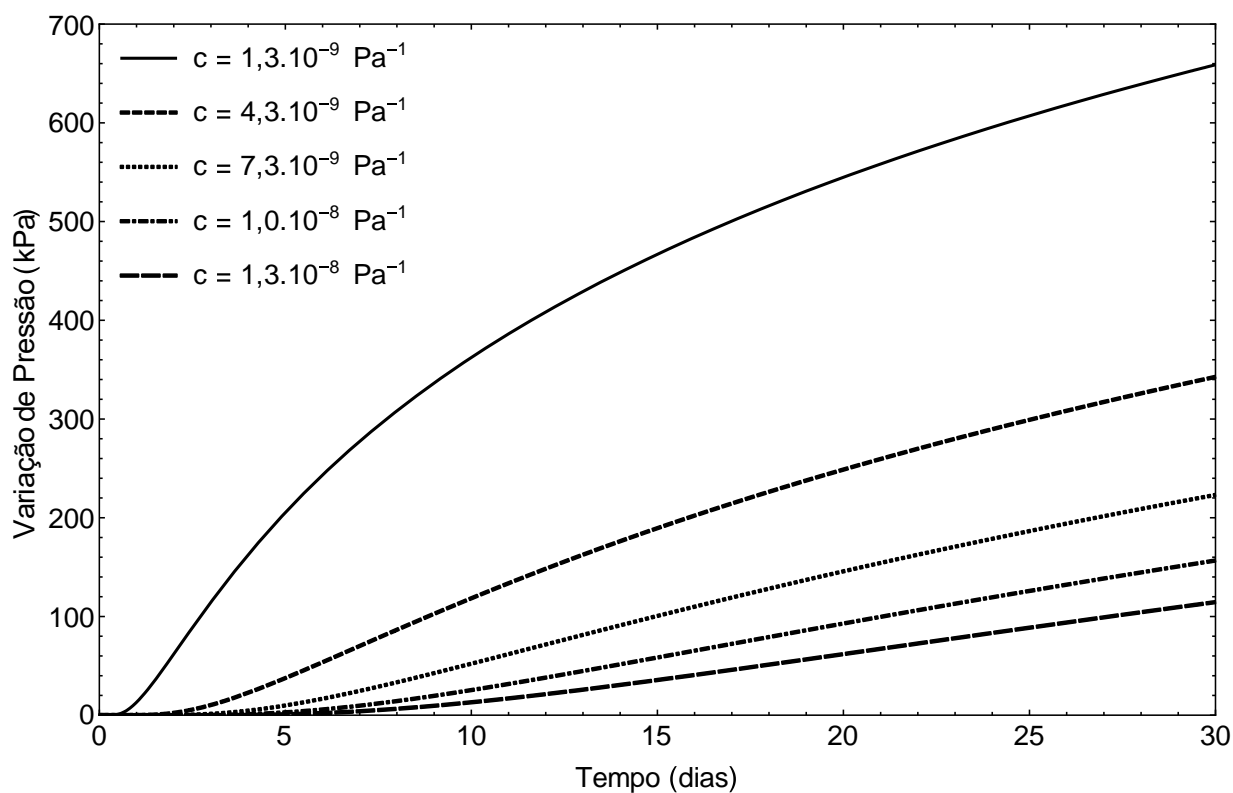


Figura 4.11. Variação de pressão no tempo para $r=300$ m e diferentes valores de compressibilidade total.

Sob o aspecto de variação da pressão com a distância (Figura 4.12), o fato de haver um atraso na propagação das condições de contorno faz com que algumas regiões mais próximas ao poço já

tenham liberado a sua reserva de energia armazenada. Já outras regiões mais distantes podem ter as tensões aliviadas, o que causa um gradiente de variação de pressões mais atenuado ao longo da expansão do poço.

Em resumo, maiores compressibilidades, para reservatórios sujeitos às mesmas condições quanto a pressão inicial aos outros parâmetros, implica em menores variações de pressão ao longo da extensão do reservatório e tempo decorrido desde o início da extração.

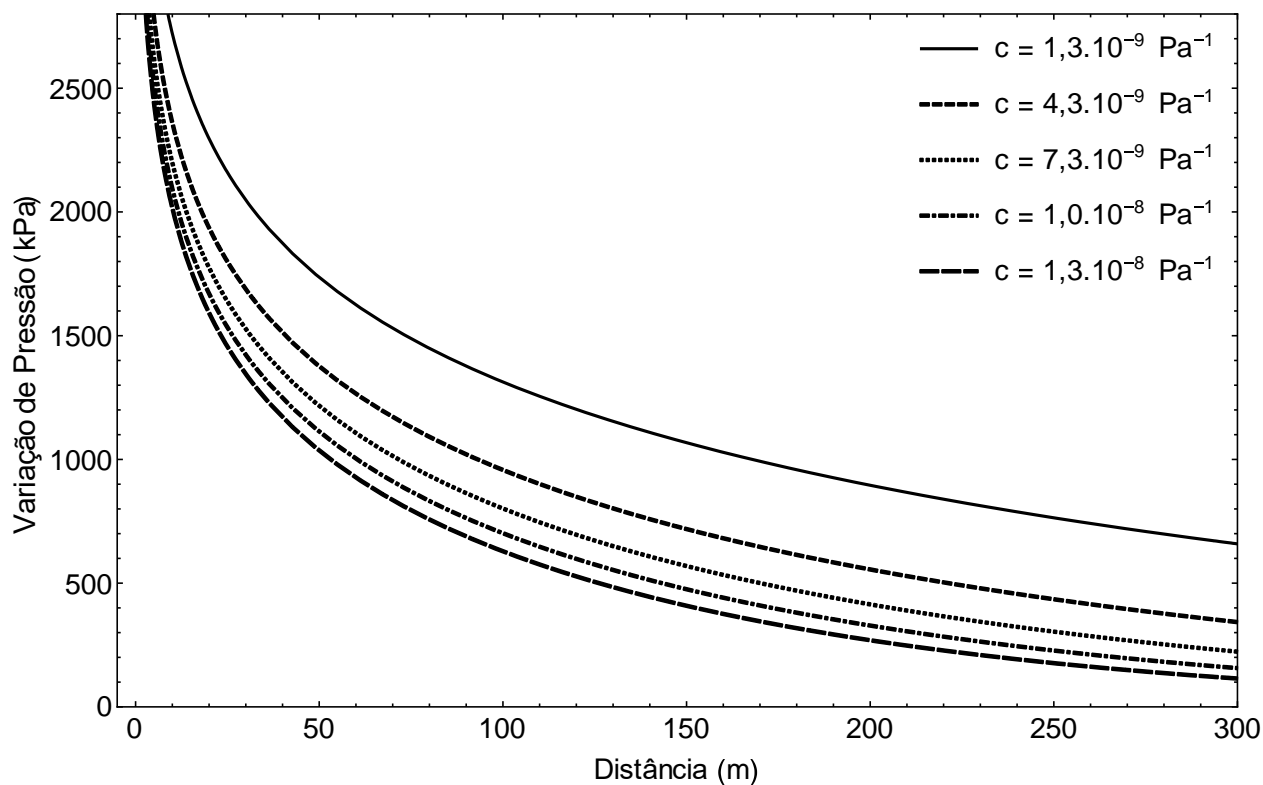


Figura 4.12 - Variação de pressão na posição para $t=30$ dias e diferentes valores de compressibilidade total.

4.8 SIMULAÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO EM ESTUDO.

Seguindo o que fora descrito no Capítulo 3, considerou-se que para variações de pressão menores que $0,1 Pa$, o raio externo é suficientemente grande para que a pressão do reservatório seja igual à pressão inicial. Neste caso, traça-se a Figura 4.13:

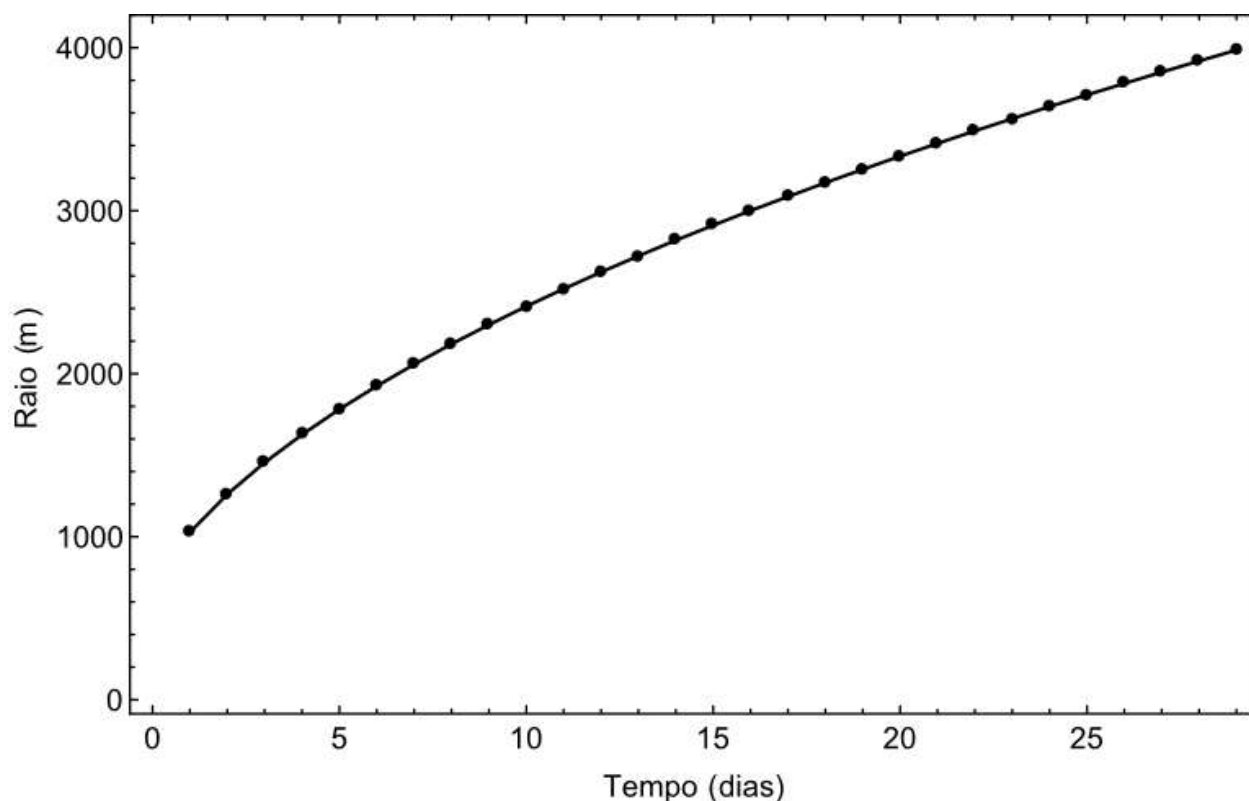


Figura 4.13 – Valores de raio (m) para cada dia após a produção para os quais $\Delta p \leq 0,1 Pa$

Para um raio em torno de 2500m, se espera obter variação de pressão próxima de zero para o reservatório. Por ser viável modelar um reservatório com dimensões ainda maiores e por preciosismo, adota-se distância de 3000m para as simulações numéricas. Para tal valor, espera-se variação de pressão de $10^{-5} Pa$.

Partindo-se da Equação (2.97) e utilizando a expressão de transmissibilidade para malha cilíndrica expressas na Tabela 2.1, resolve-se a equação utilizando-se *Mathematica Wolfram* para gerar a Figura 4.14 e Figura 4.15:

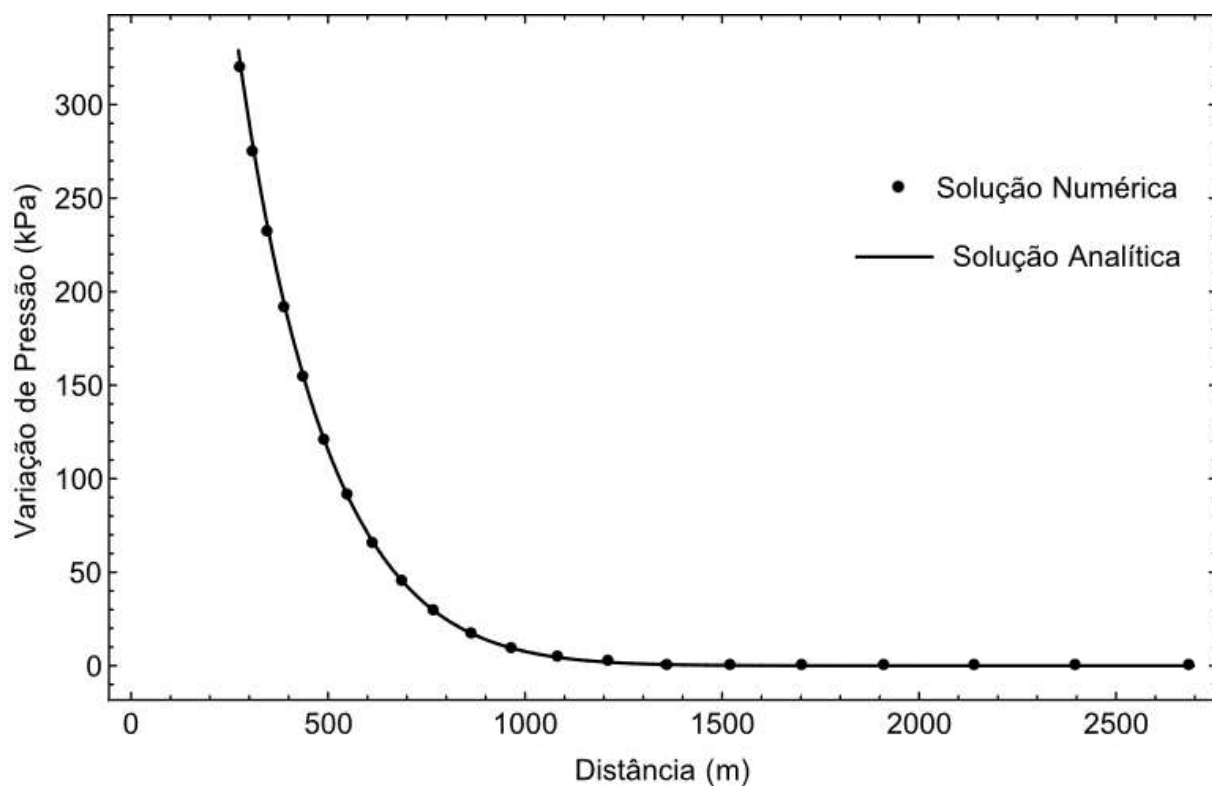


Figura 4.14 – Comparação entre soluções numérica e analítica para tempo fixo.

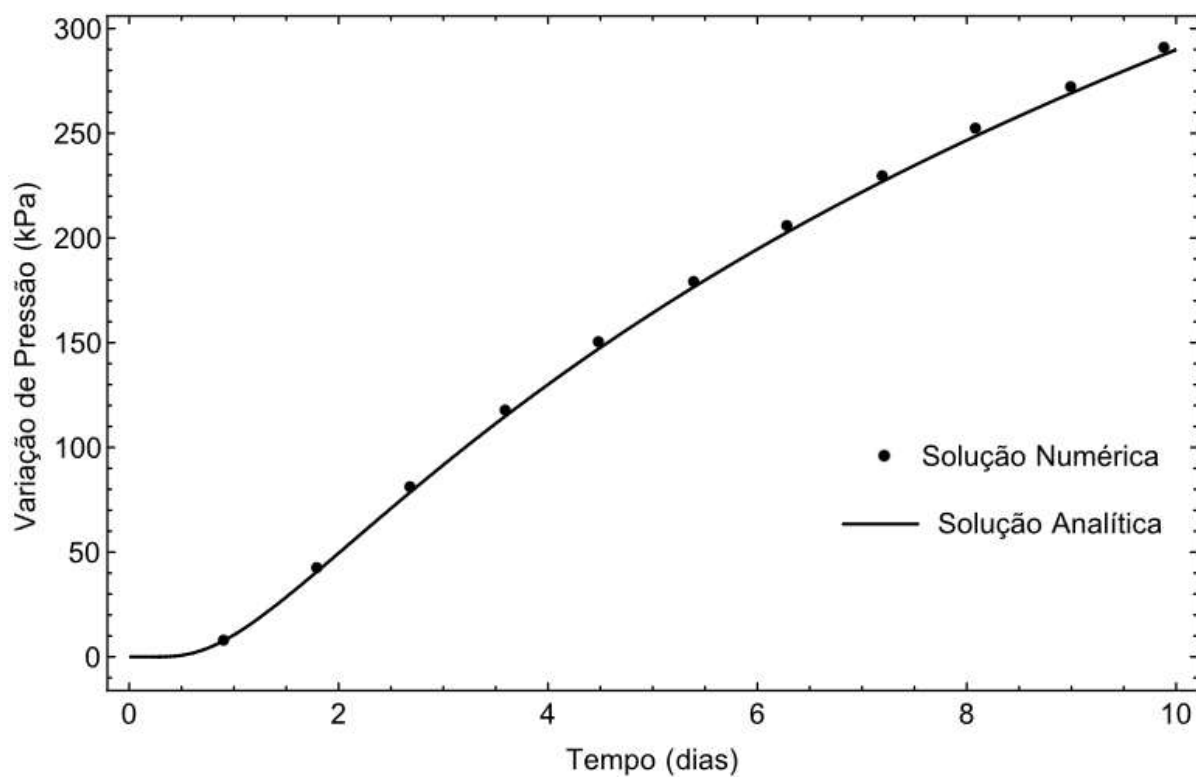


Figura 4.15 – Comparação entre soluções numérica e analítica para posição fixa.

As simulações foram geradas com passo de tempo de 0,05 dias e 900 divisões radiais, 4 tangenciais e 4 verticais. Para este número de células, o fator de crescimento geométrico da malha é de 1,0114. Nas curvas superpostas mostradas na Figura 4.14 e Figura 4.15, vê-se que a solução numérica aproxima bem a solução analítica, plotando as curvas de erro para ambos os gráficos, tem-se a Figura 4.16, a Figura 4.17, a Figura 4.18 e a Figura 4.19 para estudo dos erros relativos e absolutos para cada curva. Observa-se maiores erros absolutos próximos ao poço. Este comportamento pode ser explicado devido ao grande gradiente de pressão provocado pela reduzida área de drenagem quando se aproxima do poço. Fato este que justifica a adoção de malha de crescimento geométrico.

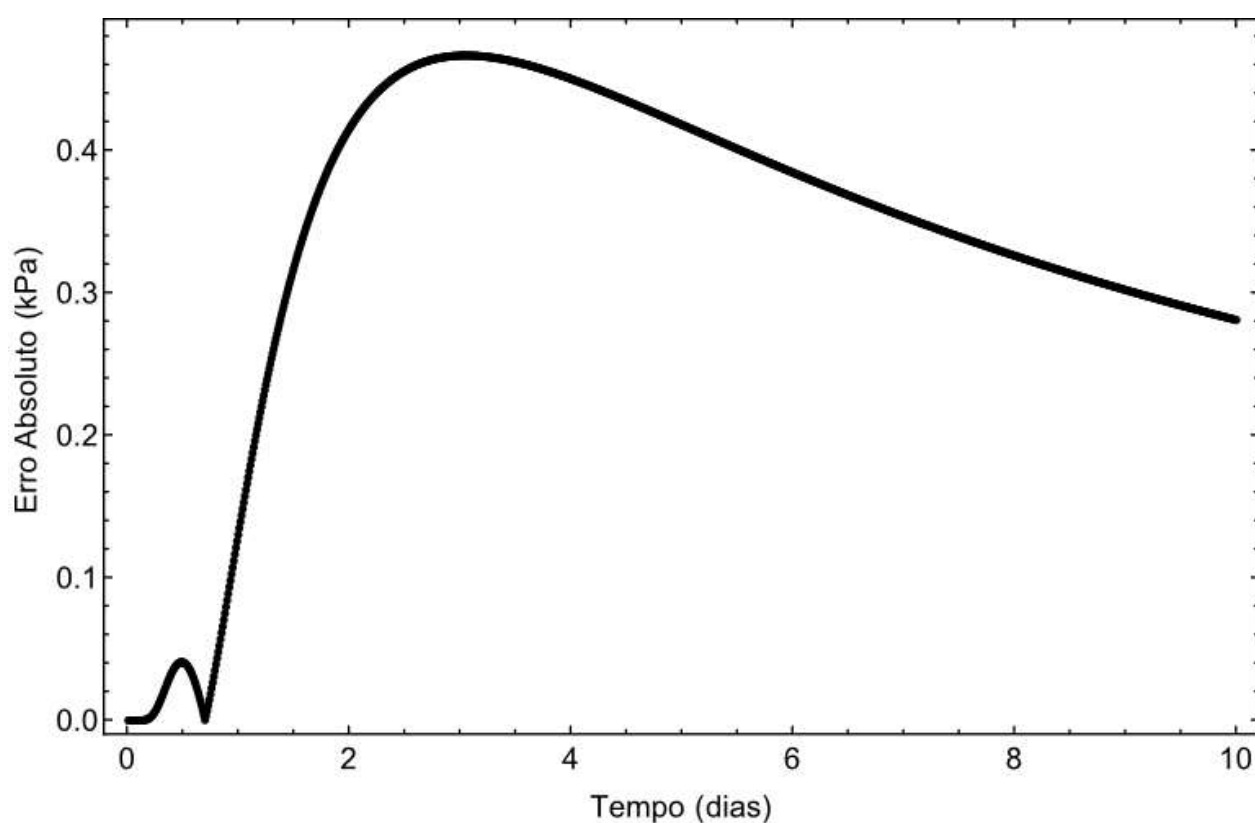


Figura 4.16 – Erro Absoluto no tempo.

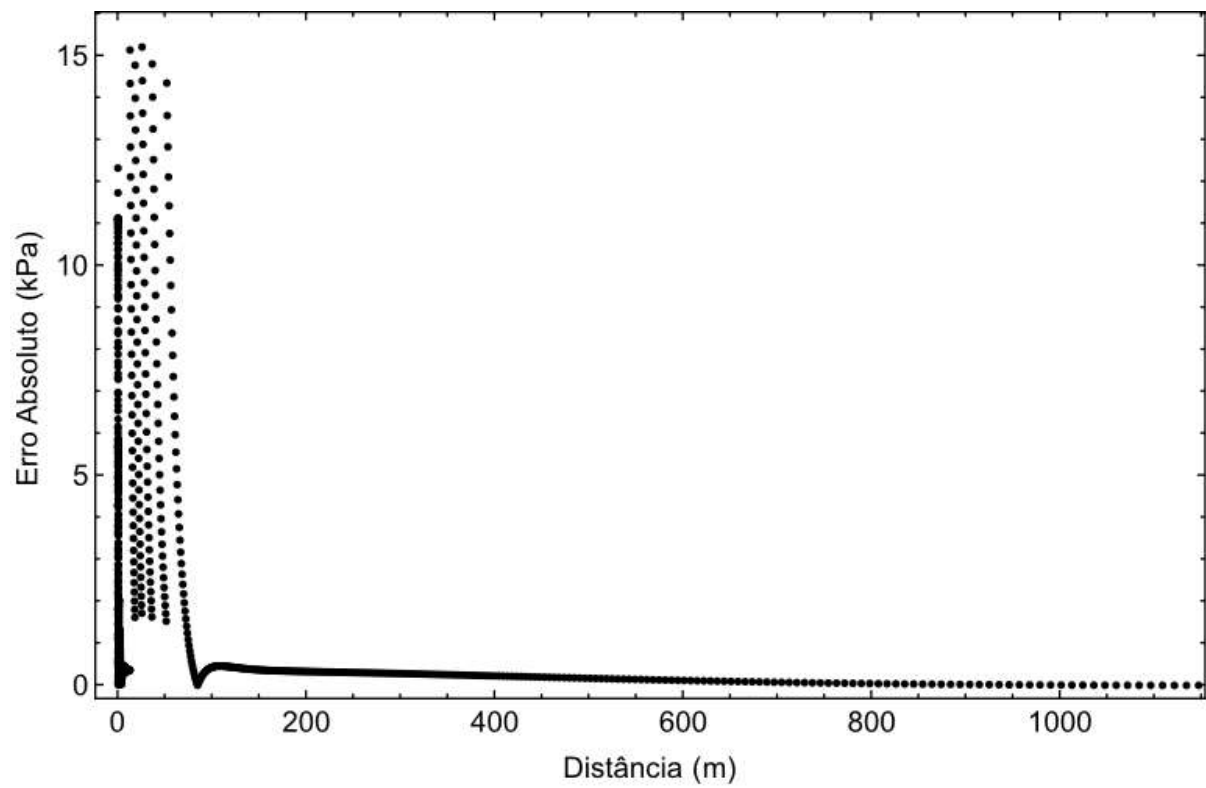


Figura 4.17 – Erro Absoluto na posição

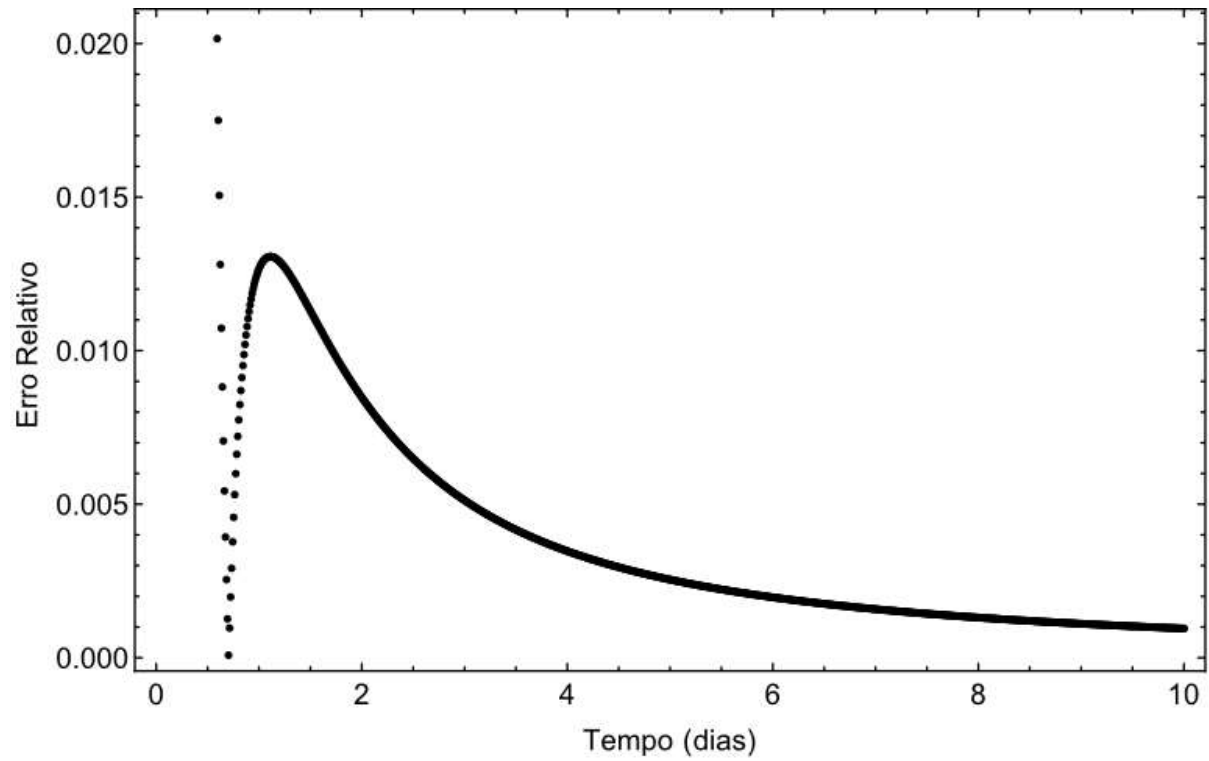


Figura 4.18 – Erro relativo no tempo.

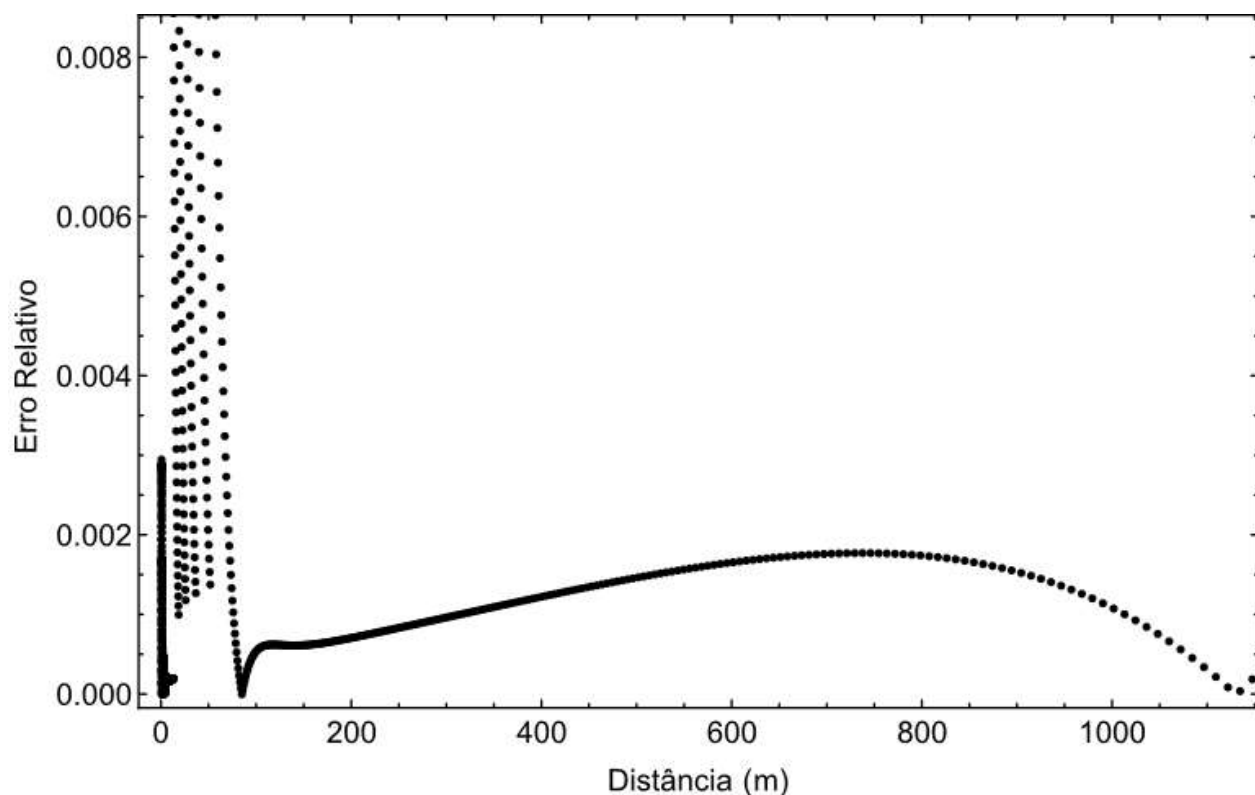


Figura 4.19 – Erro relativo na posição.

Apesar dos valores de erro relativos indicarem descontrole e valores muito altos de erro no início da simulação, os gráficos comparativos da solução e gráficos de erro absoluto mostram que os resultados são bons. O erro máximo absoluto para a variação no tempo é de 17,25 kPa e o erro máximo absoluto na distância é de 3,00kPa, valores muito pequenos se comparados com as ordens de grandezas que se lida neste caso. Se divididos pelo valor médio da solução no intervalo no qual são obtidos, estes valores são, respectivamente 4,4% e 1,5% do valor médio. O aparente descontrole do erro relativo pode ser explicado pelo fato dos valores de variação de pressão serem de ordens de grandeza muito próximas de zero, mas muito diferentes entre si. Desta forma, a razão entre o a diferença entre ela e o valor real da variação de pressão torna-se muito grande, mas na prática os dois valores estão próximos de zero e podem, inclusive, serem tratados como tal.

Os resultados mostrados mostram que o erro é mínimo e o método é validado para efetuar o estudo do caso em questão, fora pequenas oscilações no método.

4.9 COMPARAÇÃO DE RESULTADOS COM HIPÓTESES RELAXADAS

Utilizando, novamente, divisão células radiais de 900, angulares de 4, altimétricas de 4, passo de tempo de 0,05 dias com 200 iterações temporais, raio de 3000m, gera-se o gráfico mostrado na Figura 4.20:

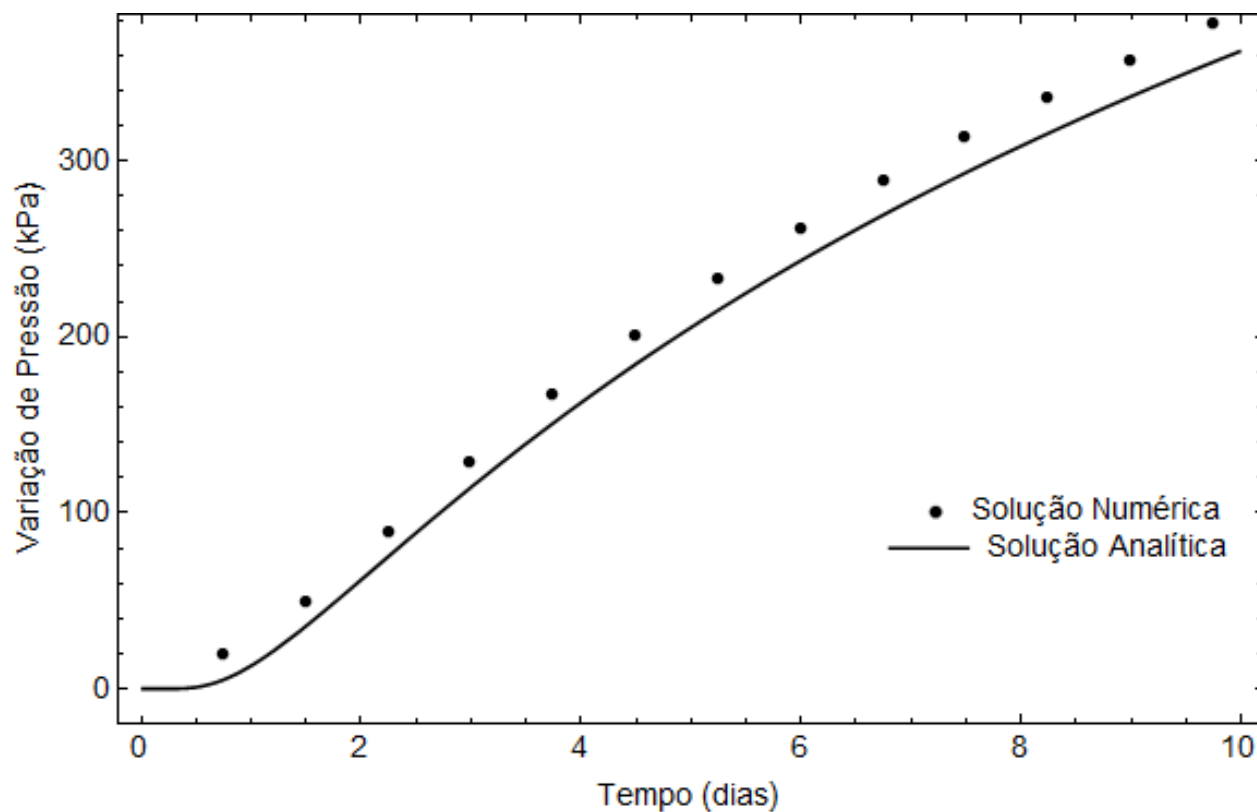


Figura 4.20 – Estudo do problema proposto com algumas hipóteses relaxada, solução no tempo comparada com a solução analítica

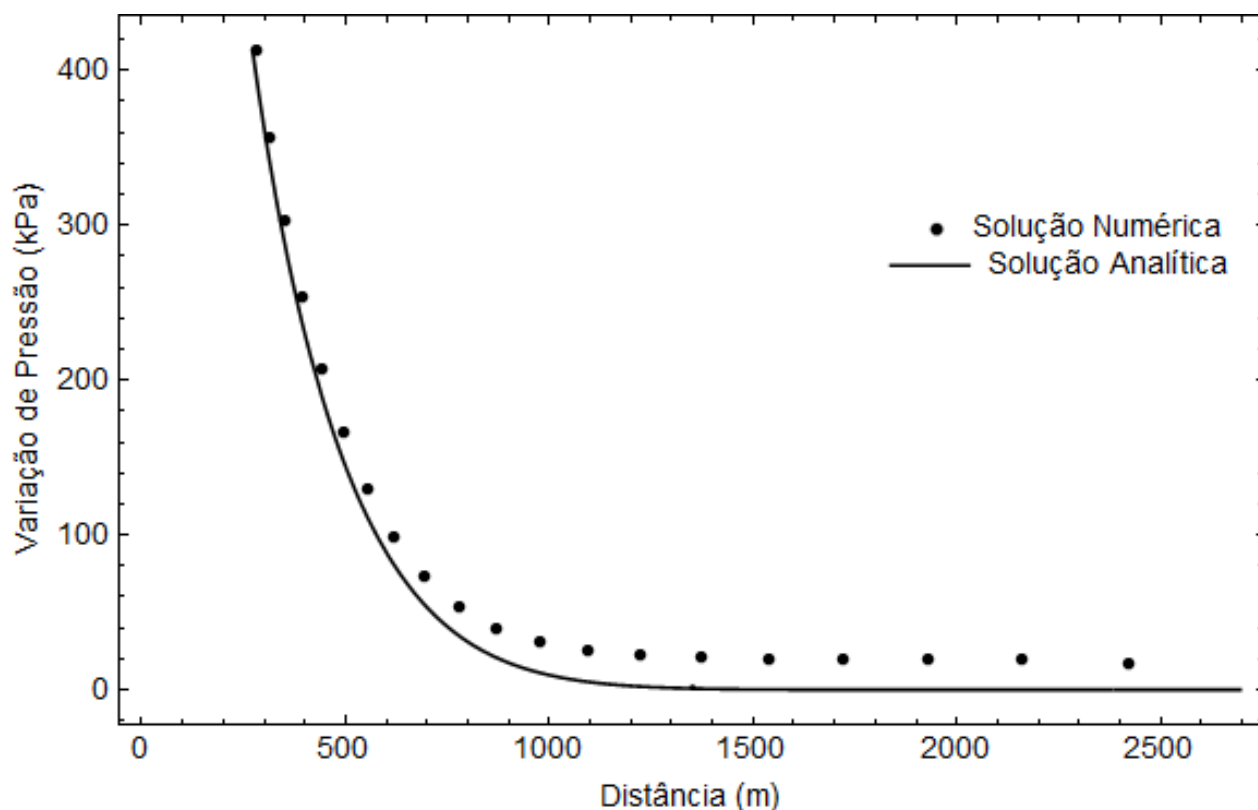


Figura 4.21 – Estudo do problema proposto com algumas hipóteses relaxada, solução no espaço comparada com a solução analítica.

Percebeu-se, durante as iterações, que os valores de transmissibilidade quase não se alteraram, o que esperado e confirma que hipóteses de viscosidade constante e fator volume-formação considerado fixo são boas hipóteses no estudo de fluxo monofásico de óleo. Este caso pode simular, na prática, o escoamento de óleo ausente de gás dissolvido, conhecido como “óleo morto”.

Considerando-se, agora, que o estado inicial supõe o potencial de fluxo como fixo e igual a zero, o fato de haver a consideração de valores de carga altimétrica relativa entre células implica em um aumento da variação de pressão, porque parte da carga que era toda considerada pressão agora se distribui no termo gravitacional. No caso estudado, pela espessura da formação ser relativamente baixa, a carga gravitacional não influencia na solução tanto quanto em formações mais espessas. Se traçado o gráfico dos valores absolutos da diferença entre a solução analítica e a solução numérica, o resultado obtido é mostrado na Figura 4.22 e na Figura 4.23.

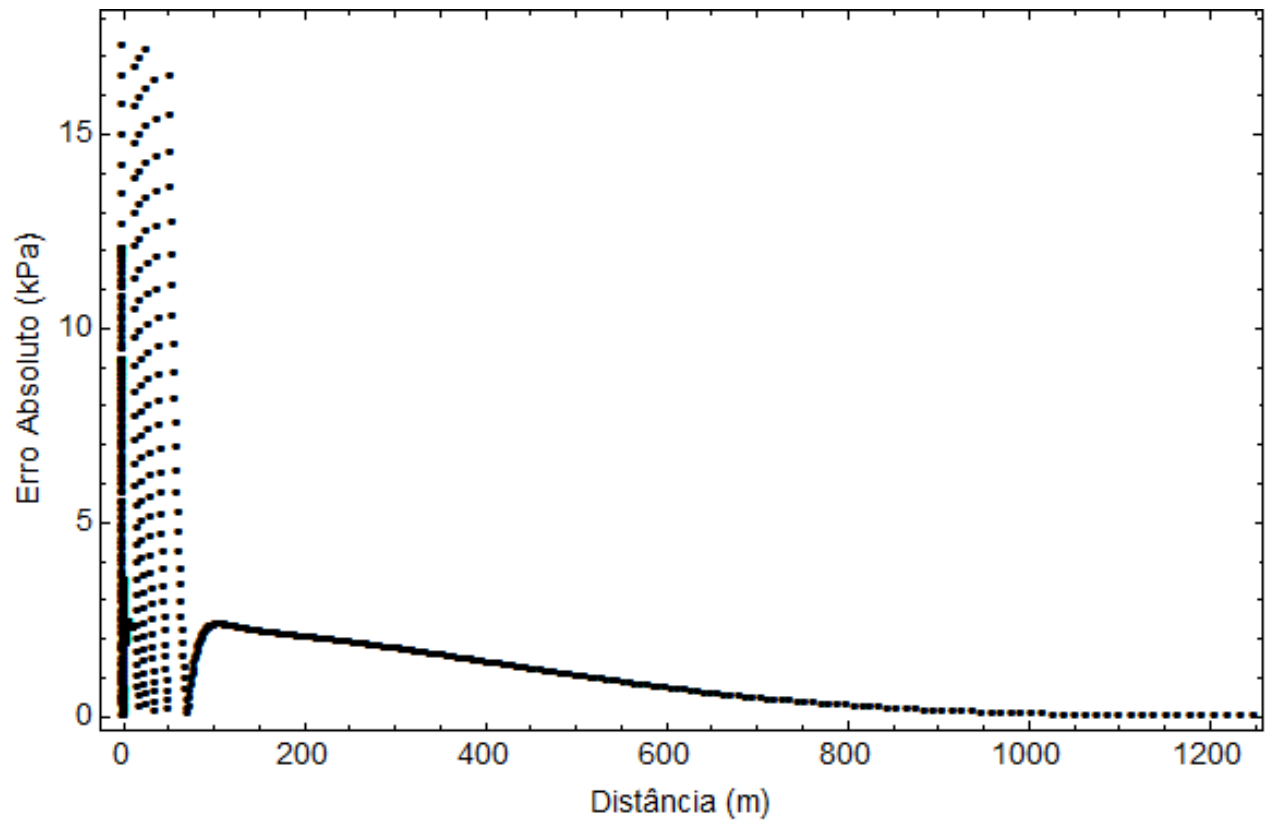


Figura 4.22 - Diferença entre a solução analítica e a solução numérica com hipóteses de gravidade e variação do fator volume-formação do óleo relaxadas analisada na distância.

O maior valor da diferença entre as soluções na distância é de 29,2kPa e das soluções no tempo é de 5,90kPa.

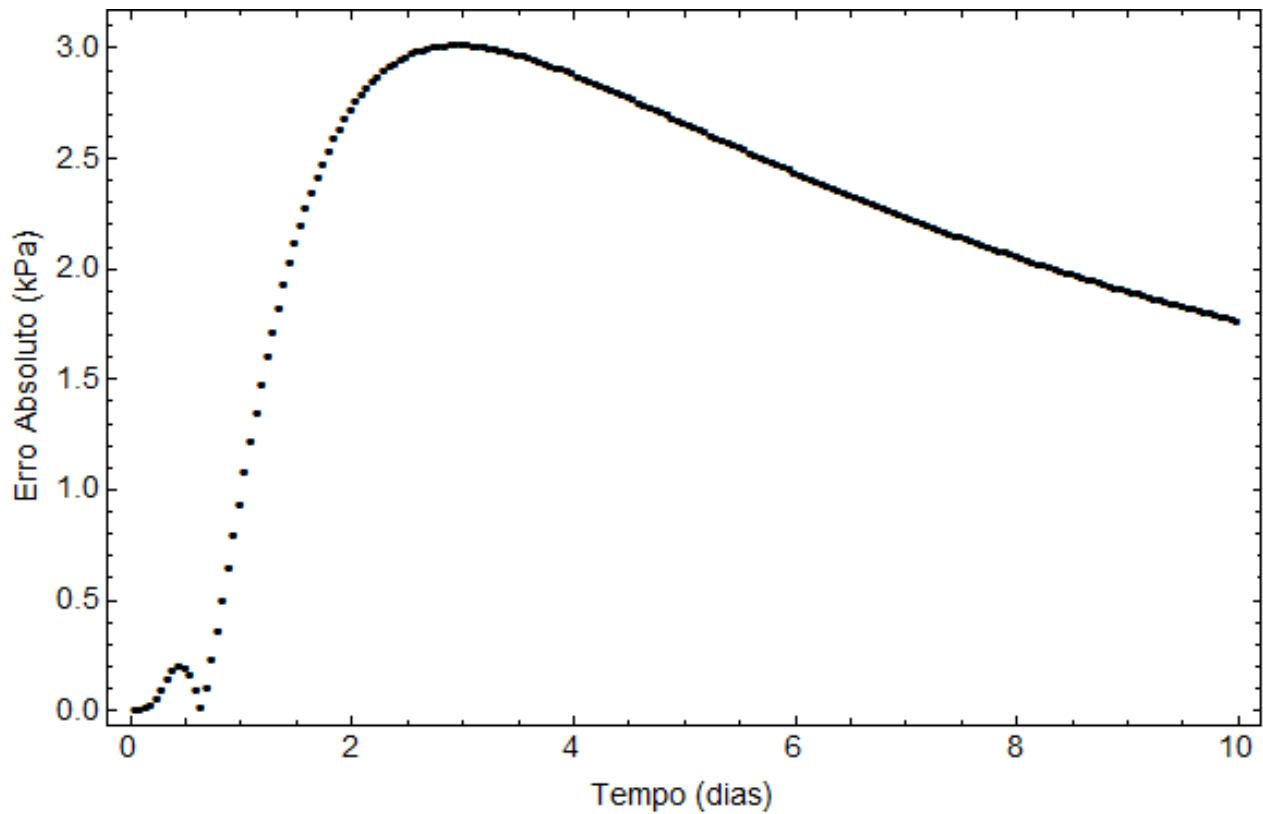


Figura 4.23 - Diferença entre a solução analítica e a solução numérica com hipóteses de gravidade e variação do fator volume-formação do óleo relaxadas analisada no tempo.

4.10 ESTUDO DE CASOS COMPLEXOS

Simulou-se uma distribuição de permeabilidade variável preenchendo as entradas de k_{θ} , k_z e k_r com números pseudo-randômicos que variavam a faixa de permeabilidade de 10^{-2} até 10^2 vezes o valor original de permeabilidade. O resultado final do estudo de variação de pressão no poço é mostrado na Figura 4.24

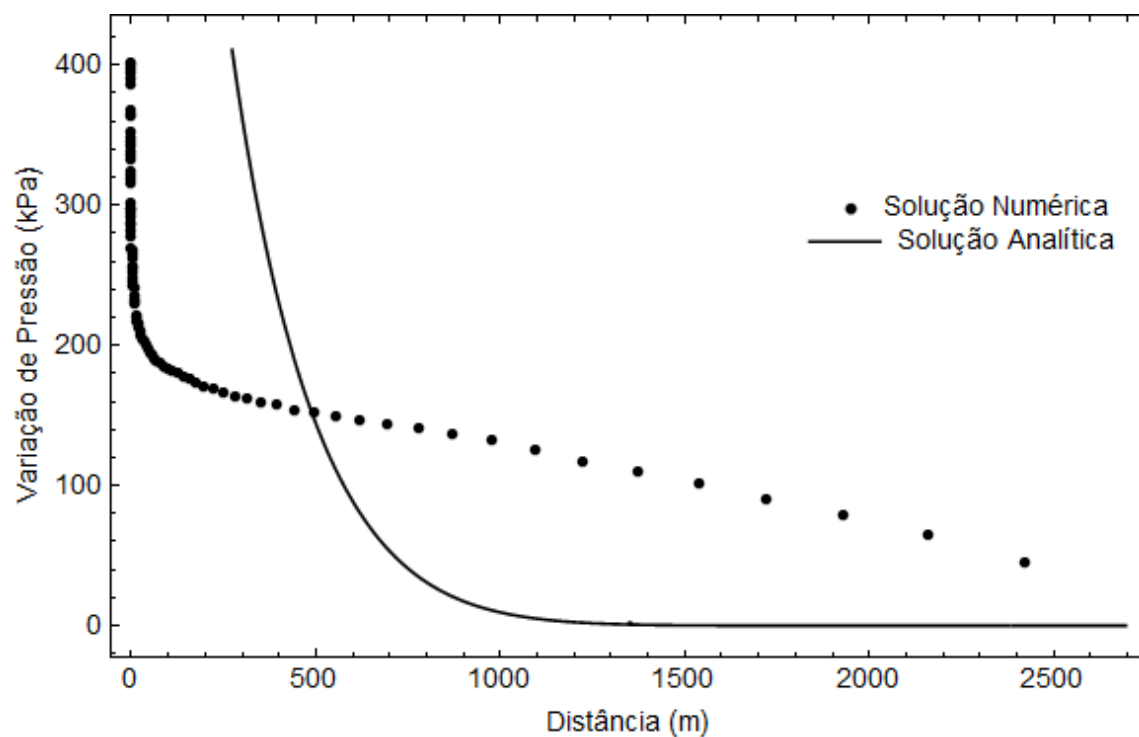


Figura 4.24 – Estudo do problema proposto com tensor de permeabilidade heterogêneo e anisotrópico, solução no tempo comparada com a solução analítica.

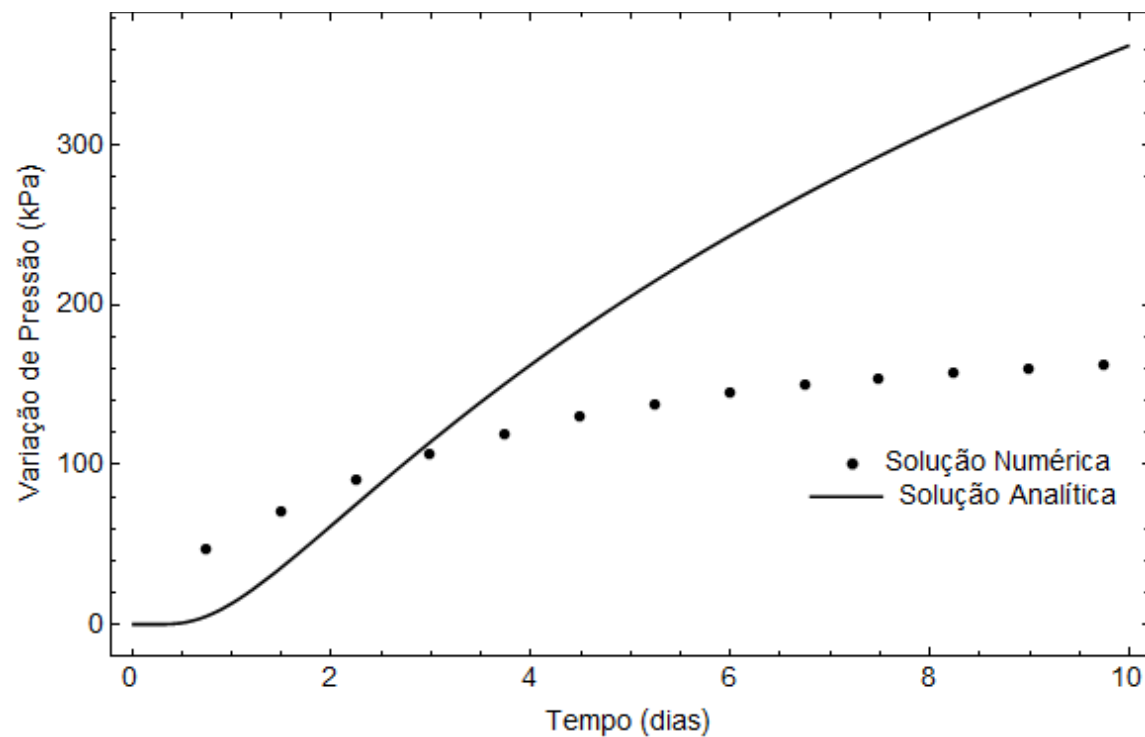


Figura 4.25 -Estudo do problema proposto com tensor de permeabilidade heterogêneo e anisotrópico, solução no espaço comparada com a solução analítica.

As curvas plotadas num mesmo espaço mostram a grande variabilidade que o perfil de pressões pode apresentar a depender de fatores de heterogeneidade e anisotropia do meio. Apesar dos valores significativamente diferentes encontrados para ambas as soluções, a solução analítica mostra, de fato, preservar o comportamento físico do problema em questão. Devido à grande disparidade entre as duas soluções, conclui-se que a solução analítica não deve, em casos práticos onde há variabilidade acentuada de permeabilidade, ser usada para estimar valores precisos de pressão.

5 CONCLUSÃO

A análise de queda de pressão do reservatório com variação dos vários parâmetros da solução analítica da equação de difusividade constitui um dos primeiros passos no estudo de viabilidade de abertura de poços, quando não se justifica executar simulações caras, demoradas e rebuscadas para definir taxas aproximadas de queda e quando se pretende ter entendimento do comportamento físico do reservatório.

Dentre os parâmetros que se deseja que tenham valores mais elevados, espera-se que sejam estes a permeabilidade, espessura de formação, porosidade e compressibilidade total. Assim, procura-se, também, que o fluido possua menor viscosidade. Estes comportamentos são procurados porque fazem a pressão no reservatório cair mais lentamente, permitindo obter maiores vazões no poço por mais tempo. O termo definido na Equação (2.79) constitui um importante critério de viabilidade para o estudo em questão.

O modelo numérico validado por meio da solução analítica representa satisfatoriamente as curvas de variação de pressão do reservatório, com erros absoluto máximos de 15kPa para a curva traçada no tempo e 0,5kPa para a curva traçada na posição. O modelo numérico também foi capaz de mostrar que a solução analítica não difere muito da solução com hipóteses relaxadas no caso de permeabilidade constante apresentou-se satisfatório no estudo de casos mais complexos de fluxo. O modelo numérico também se mostrou capaz de simular casos complexos com permeabilidade heterogênea e anisotrópica e hipóteses de modelo relaxadas, podendo ser utilizado para estudos futuros.

Vale lembrar que mesmo com as grandes famílias de métodos numéricos já consagradas, existem casos não muito bem modelados com estes modelos, sendo necessário o desenvolvimento de novas técnicas para estudar tais problemas e gerar outras que tornem a resolução dos problemas existentes mais eficiente e precisa.

O modelo numérico estudado de malha radial é muito utilizado para refino de malha em regiões próximas à poços e para estudar eficiência de poços isolados.

Para estudos futuros, sugere-se a implementação do modelo cartesiano com malha híbrida para o estudo de uma geometria de reservatório com fluido ainda monofásico. Posteriormente, sugere-se efetuar o estudo numérico de geometrias reais e fluxo multifásico pelo modelo de Diferenças Finitas, prevendo-se o comportamento das curvas de pressão para o reservatório e implementando-se fenômenos ignorados no modelo, como a formação de cones e o efeito Klinkenberg.

6 REFERÊNCIAS

- AHMED, T. **Reservoir Engineering Handbook**. 4a. ed. Burlington: Elsevier, v. único, 2010.
- AZIZ, K.; PEDROSA, O. A. Use of Hybrid Grid in Reservoir Simulation. **SPE Reservoir engineering**, Novembro 1986. 611-621.
- ERTEKIN, T.; JAMAL, H. A.-K.; GREGORY, R. K. **Basic Applied Reservoir Engineering**. Richardson: Texas, v. 7, 2001.
- FIROOZABADI, R.; SONIER, F. Numerical simulation of complex reservoir problems and the need for a different line of attack. **Pillars of the Industry**, v. 3, p. 17-19, 2007.
- JIANHUI, Z. et al. Non-Darcy flow in oil accumulation (oil displacing water) and relative permeability and oil saturation characteristics of low-permeability sandstones. **Petroleum Science**, Beijing, v. VII, n. 1, p. 20-30, Março 2010. ISSN 1995/8226.
- KASIRI, N.; BASHIRI, A. Comparative Study of Different Techniques dor Numerical Reservoir Simulation. **Petroleum, Science and Technology**, Tehran, v. 28, n. 5, p. 494-503, Fevereiro 2010. ISSN 10.1080/10916460903515532.
- KNAPPETT, J. A.; CRAIG, R. F. **Craig Mecânica dos Solos**. 8a. ed. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda., v. único, 2014.
- LIE, K.-A. **An Introduction to Reservoir Simulation Using MRST**. 1a. ed. Oslo: SINTEF ICT, v. único, 2014.
- RICCOMINI, C.; SANT'ANNA, L. G.; TASSINARI, C. C. G. Pré-sal: Geologia e Exploração. **Revista USP**, São Paulo, v. único, n. 95, p. 33-42, Setembro/Outubro/Novembro 2012. ISSN 2316/9036.
- ROSA, J. A.; CARVALHO, R. D. S.; XAVIER, A. D. J. **Engenharia de Reservatório de Petróleo**. 1a. ed. Rio de Janeiro: Editora Interciência, v. Único, 2006.
- SZYMKIEWICZ, A. **Modelling Water Flow in Unsaturated Porous Media**. 1a. ed. Gdansk: Springer, v. único, 2013.
- THOMAS, J. E. **Fundamentos de Engenharia de Petróleo**. 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência, v. único, 2004.
- WOLFRAM RESEARCH, I. **Mathematica**. Versão 10.1. ed. Champaign: Wolfram Research, Inc, 2015.

A. ANEXO: DEMONSTRAÇÃO DA EQUAÇÃO DE FLUXO RADIAL EM REGIME TRANSIENTE (ROSA, *et al.*, 2006).

No caso do fluxo radial, o comprimento ao longo do qual ocorre o fluxo é o próprio raio da formação, pois suas superfícies equipotenciais são radiais (admitindo formação isotrópica e homogênea). Definimos, além dos parâmetros definidos anteriormente, o raio do poço r_w [L] e raio externo da formação r_e [L]. A equação (2.76) é reescrita a seguir para facilitar a referência:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (\text{A.1})$$

Considera-se o reservatório infinito e produzindo a uma vazão constante q_w , o que quer dizer que a resolução do problema recai no problema de fluxo em uma dimensão. Toma-se as seguintes condições de contorno:

- $p(r, 0) = p_{i=0}, r > 0$ (condição de contorno inicial)
- $\lim_{r \rightarrow \infty} p(r, t) = p_{t=0}$ (condição de contorno externa)
- $q_w = cte$ (condição de contorno interna)

Para a última condição de contorno, é possível obter o valor da vazão a partir da equação de Darcy:

$$q = \frac{kA}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (\text{A.2})$$

Substitui-se a área na Equação (A.2) para um reservatório cilíndrico:

$$q = \frac{k2\pi rh}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (\text{A.3})$$

Reescreve-se esta equação como:

$$\frac{r \partial p}{\partial r} = \frac{q \mu}{2 \pi k h} \quad (\text{A.4})$$

Tomando-se o limite da equação com r tendendo a zero e usando o fato de que a vazão do poço é constante:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{q_w \mu}{2 \pi k h} \quad (\text{A.5})$$

A equação (A.5) é uma expressão para a condição de contorno externa do reservatório.

O próximo passo é resolver a equação de difusividade para as condições de contorno estabelecidas.

Primeiramente, reescreve-se a equação de difusividade aplicando a substituição:

$$X = \frac{\phi \mu c_i r^2}{4 k t} \quad (\text{A.6})$$

Nota-se que, após a substituição, a expressão para as derivadas espaciais são:

$$\frac{\partial X}{\partial r} = \frac{\phi \mu c_i r}{2 k t} \quad (\text{A.7})$$

E

$$\frac{\partial X}{\partial t} = -\frac{\phi \mu c_i r^2}{4 k t^2} \quad (\text{A.8})$$

Escreve-se a equação de difusividade usando a substituição imposta e aplicando a regra da cadeia:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial X} \left(r \frac{\partial p}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial r} \right) \frac{\partial X}{\partial r} = \frac{\phi \mu c_i}{k} \frac{\partial p}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial t} \quad (\text{A.9})$$

Substituindo as expressões das derivadas escritas na Equação (A.7) e Equação (A.8) na Equação (A.1). Após simplificações, a equação resultante é:

$$\frac{\partial p}{\partial X} + \frac{\partial^2 p}{\partial X^2} X = -X \frac{\partial p}{\partial X} \quad (\text{A.10})$$

Realizando uma nova substituição:

$$\frac{\partial p}{\partial X} = Y \quad (\text{A.11})$$

O que torna a equação de primeiro grau:

$$Y + \frac{\partial Y}{\partial X} X = -XY \quad (\text{A.12})$$

O termo de derivada parcial é, de fato, uma derivada ordinária:

$$Y + \frac{dY}{dX} X = -XY \quad (\text{A.13})$$

Dividindo a equação por XY:

$$\frac{1}{X} + \frac{dY}{dX} \frac{1}{Y} = -1 \quad (\text{A.14})$$

Separando-se variáveis:

$$\frac{dY}{dX} \frac{1}{Y} = -1 - \frac{1}{X} \quad (\text{A.15})$$

Integrando a Equação (A.15) com relação a X:

$$\int \frac{1}{Y} \frac{dY}{dX} dX = \int \left(-1 - \frac{1}{X} \right) dX \quad (\text{A.16})$$

Cujo resultado é a expressão a seguir, onde introduz-se uma constante de integração C_1 :

$$\ln(Y) = -X - \ln(X) + C_1 \quad (\text{A.17})$$

Tomando-se exponencial da equação para encontrar uma expressão para Y:

$$Y = \frac{Ce^{-X}}{X} \quad (\text{A.18})$$

Com $C = e^{C_1}$, usando a definição de Y:

$$\frac{dp}{dX} = \frac{Ce^{-X}}{X} \quad (\text{A.19})$$

Para $r \rightarrow \infty$, $p \rightarrow p_i$ e para $t \rightarrow 0$, $p \rightarrow p_i$. Para estas duas condições, portanto, $X \rightarrow \infty$.

Integrando a Equação (A.19):

$$\int_X^\infty \frac{dp}{dX} dX = \int_X^\infty \frac{Ce^{-X}}{X} dX \quad (\text{A.20})$$

O lado esquerdo da equação é, por definição, o diferencial de pressão

$$\int_p^{p_i} dp = \int_X^\infty \frac{Ce^{-\xi}}{\xi} d\xi \quad (\text{A.21})$$

Onde ξ é apenas uma variável de integração.

A integração da Equação (A.21) resulta em:

$$p - p_i = C \int_X^\infty \frac{e^{-X}}{X} dX \quad (\text{A.22})$$

A integral na equação é a definição da função integral exponencial, denotado por $E_i(X)$:

$$p - p_i = CE_i(X) \quad (\text{A.23})$$

A Equação (A.23) possui uma constante de integração que deve ser obtida por meio das condições de contorno. Da condição de contorno externa:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{q_w \mu}{2\pi kh} \quad (\text{A.24})$$

Procedendo à substituição proposta na Equação (A.6) para desenvolver a Equação (A.24):

$$\lim_{X \rightarrow 0} \left(r \frac{\partial p}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial r} \right) = \frac{q_w \mu}{2\pi kh} \quad (\text{A.25})$$

Substituindo os termos de derivadas:

$$\lim_{X \rightarrow 0} \left(r \frac{\partial p}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial r} \right) = \lim_{X \rightarrow 0} \left(r \frac{C e^{-X}}{X} \frac{\phi \mu c_i r}{2kt} \right) \quad (\text{A.26})$$

Mas

$$\frac{\phi \mu c_i r}{2kt} r = 2X \quad (\text{A.27})$$

Simplificando o lado direito da Equação (A.26):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(r \frac{C e^{-x}}{X} \frac{\phi \mu c_t r}{2kt} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} (2C e^{-x}) = 2C = \frac{q_w \mu}{2\pi k h} \quad (\text{A.28})$$

Logo

$$C = \frac{q_w \mu}{4\pi k h} \quad (\text{A.29})$$

Substituindo o valor de C na solução encontrada:

$$p = p_{t=0} - \frac{q_w \mu}{4\pi k h} E_i \left(\frac{\phi \mu c_t r^2}{4kt} \right) \quad (\text{A.30})$$

Novamente, se a vazão especificada for uma vazão na superfície, a Equação (A.30) se torna

$$p = p_{t=0} - \frac{q_w \mu B}{4\pi k h} E_i \left(\frac{\phi \mu c_t r^2}{4kt} \right) \quad (\text{A.31})$$

que é a Equação (2.78) usada na definição da Equação (2.79), crucial aos estudos propostos.

B. ANEXO: OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS FINITA (ERTEKIN, *et al*, 2001).

Retoma-se a Equação (2.62), Descrita na Seção 2.2:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{k_r}{\mu B} \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{k_\theta}{\mu B} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{k_z}{\mu B} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{k_r}{\mu B} \frac{\partial Z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{k_\theta}{\mu B} \frac{\partial Z}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{k_z}{\mu B} \frac{\partial Z}{\partial z} \right) + \frac{\phi c_t}{B} \frac{\partial p}{\partial t} \end{aligned} \quad (B.1)$$

A Equação (B.1) será algebricamente alterada para se propor um modelo de diferenças finitas compatível com o problema. Multiplica-se a Equação (B.1) pelo valor de um volume de controle. As seguintes expressões são válidas para o volume de controle:

$$V_b = \Delta \theta r \Delta z \Delta r \quad (B.2)$$

em que,

$$\Delta r_i = r_{i+1/2} - r_{i-1/2} \quad (B.3)$$

$$\Delta \theta_j = \theta_{j+1/2} - \theta_{j-1/2} \quad (B.4)$$

$$\Delta z_k = z_{k+1/2} - z_{k-1/2} \quad (B.5)$$

onde,

Δr = a espessura radial do volume de controle [L];

$\Delta \theta$ = a espessura tangencial do volume de controle [adimensional];

Δz = a altura do volume de controle [L].

Vale notar que o raio nesta expressão é medido do centro do poço até o centro do volume de controle.

Movendo-se os termos constantes para dentro das derivações e adicionando o termo de entrada/saída de vazão para que se modele condições de contorno internas:

$$\begin{aligned} \Delta r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \Delta \theta \Delta h \frac{k_r}{\mu B} \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \Delta \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\Delta z \Delta r}{r} \frac{k_\theta}{\mu B} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \Delta z \frac{\partial}{\partial z} \left(r \Delta \theta \Delta r \frac{k_z}{\mu B} \frac{\partial p}{\partial z} \right) + q_{sc} = \\ \frac{V_b c_i \phi}{B} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \Delta \theta \Delta h \frac{k_r}{\mu B} \frac{\partial Z}{\partial r} \right) + \Delta \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\Delta z \Delta r}{r} \frac{k_\theta}{\mu B} \frac{\partial Z}{\partial \theta} \right) + \Delta z \frac{\partial}{\partial z} \left(r \Delta \theta \Delta r \frac{k_z}{\mu B} \frac{\partial Z}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (B.6)$$

O próximo passo é aplicar as equações de diferenças finitas para que se obtenhas os termos de transmissibilidade. Os termos descritos pelas Equações (B.3) a (B.5) permanecem constantes quando se analisa qualquer direção que não a deles. Isto quer dizer que células ao longo de um mesmo círculo possuem mesmo comprimento radial e altura, células ao longo de mesmo raio têm mesmo ângulo e altura e células ao longo da mesma altura têm mesmo comprimento radial e ângulo. Pode-se adotar um desenvolvimento de diferenças finitas a central para desenvolver o termo espacial ao redor do ponto i e utilizando os pontos $i+1/2$ e $i-1/2$ novamente na equação resultante ao termo de derivada de pressão. Opta-se, nas manipulações que seguem, em omitir os índices não variantes das células em cada caso.

Primeiramente, para o termo de transmissibilidade radial,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r \Delta \theta \Delta h k_r}{\mu B} \frac{\partial p}{\partial r} \right) \Delta r = \\ \frac{1}{\Delta r_i} \left[\left(\frac{r \Delta \theta \Delta h k_r}{B \mu} \right)_{i+1/2} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)_{i+1/2} - \left(\frac{r \Delta \theta \Delta h k_r}{B \mu} \right)_{i-1/2} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)_{i-1/2} \right] \Delta r_i \end{aligned} \quad (B.7)$$

Utilizando diferenças centrais da mesma forma para os termos de pressão:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)_{i+1/2} = \frac{p_i - p_{i+1}}{\Delta r_{i+1/2}} \quad (B.8)$$

e

$$\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)_{i-1/2} = \frac{p_i - p_{i-1}}{\Delta r_{i-1/2}} \quad (\text{B.9})$$

Substituindo a Equação (B.8) e Equação (B.9) na Equação (B.7), escreve-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r \Delta \theta \Delta h k_r}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \right) \Delta r = \\ \left(\frac{r \Delta \theta \Delta h k_r}{\mu \Delta r} \right)_{i+1/2} (p_{i+1} - p_i) - \left(\frac{r \Delta \theta \Delta h k_r}{\mu \Delta r} \right)_{i-1/2} (p_i - p_{i-1}) \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Fazendo-se:

$$T_{li\pm 1/2} = \left(\frac{r \Delta \theta \Delta z k_r}{B \mu \Delta r} \right)_{i\pm 1/2} \quad (\text{B.11})$$

Tomando-se a média harmônica entre a transmissibilidade da célula i e da célula vizinha $i+1$ ou $i-1$ ao longo do centro de cada célula até a fronteira, exceto pelo termo de viscosidade e volume-formação do óleo:

$$\frac{1}{T_{i\pm 1/2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu B} \right) \left[\left(\frac{\Delta r}{r \Delta \theta \Delta z k_r} \right)_{i\pm 1} + \left(\frac{\Delta r}{r \Delta \theta \Delta z k_r} \right)_i \right] \quad (\text{B.12})$$

ou

$$\begin{aligned} T_{i\pm 1/2} = \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu B} \right) 2 \left(\frac{r_i \Delta \theta \Delta z r_{i\pm 1} \Delta \theta \Delta z (k_r)_i (k_r)_{i\pm 1}}{(\pm 1) r_i \Delta \theta \Delta z (r_{i\pm 1} - r_{i\pm 1/2}) (k_r)_i + (\pm 1) (r_i - r_{i\mp 1/2}) r_{i\pm 1} \Delta \theta \Delta z (k_r)_{i\pm 1}} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Como a média harmônica é tomada somente no sentido da fronteira, as definições das Equações (B.3) a (B.5) serão alteradas ao longo das manipulações do restante deste anexo para que se possa utilizar a diferença entre os termos corretos em cada caso

Rearranjando os termos:

$$T_{i\pm 1/2} = \left(\frac{1}{\mu B} \right) \left(\frac{\Delta\theta \Delta z}{(\pm 1) \frac{(r_{i\pm 1} - r_{i\pm 1/2})}{r_{i\pm 1}} \frac{1}{(k_r)_{i\pm 1}} + (\pm 1) \frac{(r_{i\pm 1/2} - r_i)}{r_i} \frac{1}{(k_r)_i}} \right) \quad (\text{B.14})$$

Utilizando-se o mesmo raciocínio presente na Subseção 2.6.1 para se transforma as expressões envolvendo raios no denominador da Equação (B.14) em logaritmos, tem-se:

$$T_{i\pm 1/2} = \left(\frac{1}{\mu B} \right) \left[\frac{\Delta\theta \Delta z}{(\pm 1) \ln \left(\frac{r_{i\pm 1}}{r_{i\pm 1/2}} \right) \frac{1}{(k_r)_{i\pm 1}} + (\mp 1) \ln \left(\frac{r_{i\pm 1/2}}{r_i} \right) \frac{1}{(k_r)_i}} \right] \quad (\text{B.15})$$

Que é a expressão fornecida para a transmissibilidade radial pela Tabela 2.1.

Para o termo tangencial, aplica-se novamente as diferenças finitas como anteriormente:

$$\Delta\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\frac{\Delta z \Delta r}{r} \frac{k_\theta}{\mu B} \frac{\partial p}{\partial\theta} \right) = \frac{1}{\Delta\theta_j} \left[\left(\frac{\Delta z \Delta r k_\theta}{r B \mu} \right)_{j+1/2} \left(\frac{\partial p}{\partial\theta} \right)_{j+1/2} - \left(\frac{\Delta z \Delta r k_\theta}{r B \mu} \right)_{j-1/2} \left(\frac{\partial p}{\partial\theta} \right)_{j-1/2} \right] \Delta\theta_j \quad (\text{B.16})$$

$$\Delta\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\frac{\Delta z \Delta r}{r} \frac{k_\theta}{\mu B} \frac{\partial p}{\partial\theta} \right) = \left(\frac{\Delta z \Delta r k_\theta}{r B \mu \Delta\theta} \right)_{j+1/2} (p_{j+1} - p_j) - \left(\frac{\Delta z \Delta r k_\theta}{r B \mu \Delta\theta} \right)_{j-1/2} (p_j - p_{j-1}) \quad (\text{B.17})$$

Fazendo

$$T_{j\pm 1/2} = \left(\frac{\Delta z \Delta r k_\theta}{r B \mu \Delta \theta} \right)_{j\pm 1/2} \quad (\text{B.18})$$

Novamente, usando a média harmônica para células vizinhas:

$$T_{j\pm 1/2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu B} \right) \times \quad (\text{B.19})$$

$$2 \left(\frac{\frac{\Delta z \Delta r}{r} \frac{\Delta z \Delta r}{r} (k_\theta)_j (k_\theta)_{j\pm 1}}{\frac{\Delta z \Delta r}{r} (\pm 1) (\theta_{i\pm 1} - \theta_{i\pm 1/2}) (k_\theta)_j + \frac{\Delta z \Delta r}{r} (\pm 1) (\theta_{j\pm 1/2} - \theta) (k_\theta)_{j\pm 1}} \right)$$

Aplicando a expressão da fronteira entre células:

$$T_{j\pm 1/2} = \frac{\ln \left(\frac{r_{i+1/2}}{r_{i-1/2}} \right) \Delta z_k}{(\pm 1) \frac{(\theta_{j\pm 1} - \theta_{j\pm 1/2})}{(k_\theta)_{j\pm 1}} + (\pm 1) \frac{(\theta_{j\pm 1/2} - \theta_j)}{(k_\theta)_j}} \quad (\text{B.20})$$

Para o termo de cota, aplica-se novamente as diferenças finitas como anteriormente:

$$\Delta z \frac{\partial}{\partial z} \left(r \Delta \theta \Delta r \frac{k_z}{\mu B} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \quad (\text{B.21})$$

$$\frac{1}{\Delta z_k} \left[\left(\frac{r \Delta \theta \Delta r k_z}{B \mu} \right)_{k+1/2} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)_{k+1/2} - \left(\frac{r \Delta \theta \Delta r k_z}{B \mu} \right)_{k-1/2} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)_{k-1/2} \right] \Delta z_k$$

$$\Delta z \frac{\partial}{\partial z} \left(r \Delta \theta \Delta r \frac{k_z}{\mu B} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \left(\frac{r \Delta \theta \Delta r k_z}{B \mu} \right)_{k+1/2} (p_{k+1} - p_k) - \left(\frac{r \Delta \theta \Delta r k_z}{B \mu} \right)_{k-1/2} (p_k - p_{k-1}) \quad (\text{B.22})$$

Fazendo

$$T_{k\pm 1/2} = \left(\frac{r \Delta \theta \Delta r k_z}{B \mu} \right)_{k\pm 1/2} \quad (\text{B.23})$$

Novamente, usando a média harmônica para células vizinhas:

$$T_{k\pm 1/2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu B} \right) 2 \left(\frac{r^2 \Delta \theta \Delta r \Delta \theta \Delta r (k_z)_k (k_z)_{k\pm 1}}{r \Delta \theta \Delta r (\pm 1) (z_{k\pm 1} - z_{k\pm 1}) (k_z)_k + (\pm 1) (z_{k\pm 1/2} - z_k) r \Delta \theta \Delta r (k_z)_{k\pm 1}} \right) \quad (\text{B.24})$$

$$T_{k\pm 1/2} = \frac{\frac{\Delta \theta_j}{2} (r_{i+1/2}^2 - r_{i-1/2}^2)}{(\pm 1) \frac{z_{k\pm 1/2} - z_k}{(k_z)_{i,j,k}} + (\pm 1) \frac{z_{k\pm 1} - z_{k\pm 1/2}}{(k_z)_{i,j,k+1}}} \quad (\text{B.25})$$

Isolando os termos das Equações (B.25), (B.20) e (B.15) que dependem da geometria da malha e direção de fluxo em um termo só, G , a transmissibilidade se torna:

$$T_{i,j,k} = \left(\frac{G}{B \mu} \right)_{i,j,k} \quad (\text{B.26})$$

Agora, realiza-se a discretização do termo temporal. Para se obter o método implícito, utiliza-se uma expansão de diferenças atrasadas a partir de $i + 1$. Desta forma, todos os termos de pressão da discretização espacial devem ser escritos no tempo $n + 1$:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)_i^n = \frac{p^{n+1} - p^n}{\Delta t} \quad (\text{B.27})$$

O termo de transmissibilidade deve ser escrito no tempo n , porque não se sabe a pressão no tempo $n + 1$ e, portanto, não se tem a expressão para os termos dependentes de pressão que ele abrange. Neste caso, usualmente se obtém a pressão no tempo $n + 1$, obtém-se o novo valor da transmissibilidade no nível $n + 1$ e utiliza-se este valor na Equação (2.97) para resolvê-la novamente. Itera-se o procedimento até se obter uma resposta convergente para p_i^{n+1} . No caso em questão, assume-se que os termos de transmissibilidade não variam significativamente com a pressão no reservatório, o que é razoável para fluídos ligeiramente compressíveis. No caso de fluídos compressíveis, no entanto, a transmissibilidade varia significativamente.

A equação original se torna:

$$\begin{aligned} A_{i,j,k}^n p_{i,j,k+1}^{n+1} + B_{i,j,k}^n p_{i,j,k-1}^{n+1} + N_{i,j,k}^n p_{i,j+1,k}^{n+1} + \\ S_{i,j,k}^n p_{i,j-1,k}^{n+1} + W_{i,j,k}^n p_{i+1,j,k}^{n+1} + E_{i,j,k}^n p_{i-1,j,k}^{n+1} + C_{i,j,k}^{n+1} p_{i,j,k}^{n+1} = Q_{i,j,k}^n \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

Que é a expressão utilizada na Seção 2.6.

C. ANEXO: MUDANÇA DE VARIÁVEIS PARA COORDENADAS POLARES

Neste anexo Realização substituição de variáveis para reescrever a Equação (2.61) na forma de coordenadas polares. Retoma-se a Equação (2.61):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k_x}{B\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k_y}{B\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{k_z}{B\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k_x}{B\mu} \gamma \frac{\partial Z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k_y}{B\mu} \gamma \frac{\partial Z}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{k_z}{B\mu} \gamma \frac{\partial Z}{\partial z} \right) + \frac{\phi c_t}{B} \frac{\partial p}{\partial t} \end{aligned} \quad (C.1)$$

Reescreve-se somente os termos de pressão, por conveniência. O procedimento para os termos de cota é análogo.

Realizando a seguintes substituições:

$$x = r \cos(\theta) \quad (C.2)$$

,

$$y = r \sin(\theta) \quad (C.3)$$

e

$$z = z \quad (C.4)$$

Além disto, faz-se também:

$$\frac{k}{B\mu} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (C.5)$$

,

$$\frac{k}{B\mu} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (C.6)$$

,

$$\frac{k}{B\mu} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} \quad (C.7)$$

Nota-se que

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos(\theta) \quad (\text{C.8})$$

,

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = -r \operatorname{sen}(\theta) \quad (\text{C.9})$$

,

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \operatorname{sen}(\theta) \quad (\text{C.10})$$

e

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = r \cos(\theta) \quad (\text{C.11})$$

A Equação a ser transformada é

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k_x}{\mu B} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k_y}{\mu B} \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{k_z}{\mu B} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (\text{C.12})$$

Não é necessário fazer alteração alguma na direção z, porque a substituição de variáveis mantém esta variável; o desenvolvimento, então, segue apenas para as direções x e y.

Partindo-se das expressões dos termos de variação espacial já nas formas polares:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \quad (\text{C.13})$$

ou

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos(\theta) + \frac{\partial u}{\partial y} \operatorname{sen}(\theta) \quad (\text{C.14})$$

Aplicando novamente a derivada:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \cos^2(\theta) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \operatorname{sen}^2(\theta) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\text{C.15})$$

ou

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \cos(\theta) \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial y}{\partial r} \right] + \sin(\theta) \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial y}{\partial r} \right] \quad (\text{C.16})$$

Realizando o mesmo para a derivada na direção tangencial:

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} \quad (\text{C.17})$$

ou

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x} (-r \sin(\theta)) + \frac{\partial u}{\partial y} (r \cos(\theta)) \quad (\text{C.18})$$

Calculando a segunda derivada:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial u}{\partial x} (-r \sin(\theta)) + \frac{\partial u}{\partial y} (r \cos(\theta)) \right] \quad (\text{C.19})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = -r \cos(\theta) \frac{\partial u}{\partial x} - r \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + r \sin(\theta) \frac{\partial u}{\partial y} + r \cos(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (\text{C.20})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = & -r \cos(\theta) \frac{\partial u}{\partial x} - r \sin(\theta) \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial y}{\partial \theta} \right) - r \sin(\theta) \frac{\partial u}{\partial y} + \\ & r \cos(\theta) \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial y}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

ou então

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = & - \left(r \cos(\theta) \frac{\partial u}{\partial x} + r \sin(\theta) \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ & + r^2 \left(\cos^2(\theta) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \cos(\theta) \sin(\theta) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \sin^2(\theta) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

Somando a Equação (C.16) à Equação (C.22) multiplicada por $1/r^2$, tem-se:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = -\frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos(\theta) + \frac{\partial u}{\partial y} \sin(\theta) \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\text{C.23})$$

Usando a Equação (C.14), tem-se

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{k_r}{\mu B} \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \left(\frac{k_r}{\mu B} \frac{\partial p}{\partial r} \right) = + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k_x}{\mu B} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k_y}{\mu B} \frac{\partial p}{\partial y} \right) \quad (\text{C.24})$$

Por último, nota-se, aplicando-se a regra da cadeia, que

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{k_r}{\mu B} \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{k_r}{\mu B} \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{k_r}{\mu B} \frac{\partial p}{\partial r} \right) \quad (\text{C.25})$$

A Equação final é, então:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{k_r}{\mu B} \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{k_z}{\mu B} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k_x}{\mu B} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k_y}{\mu B} \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{k_z}{\mu B} \frac{\partial p}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.26})$$

Que é a expressão utilizada no lado esquerdo da Equação (2.62). Partindo-se do mesmo procedimento utilizado aplicando-o para o termo de gradiente de cota, obtem-se a expressão completa da equação.